

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219133 4

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

COURS

d'Analyse Infinitésimale

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin

Professeur à l'Université de Louvain

Membre de l'Académie Royale de Belgique

TOME II

Deuxième édition

Considérablement remaniée

LOUVAIN

A. Uystpruyst-Dieudonné

ÉDITEUR

10, rue de la Monnaie, 10.

PARIS

Gauthier-Villars

ÉDITEUR

55, Quai des Grands Augustins, 55.

1912

Préface de la deuxième édition.

Dans cette seconde édition, toute la rédaction du tome II a subi des modifications plus ou moins profondes, mais la plus importante provient de l'introduction des intégrales multiples de M. Lebesgue. Nous avons exposé cette théorie en nous guidant sur les Mémoires fondamentaux de l'auteur et nous avons été amené à traiter une question nouvelle qui en fournit d'intéressantes applications, celle des développements de fonctions en séries de polynomes. En outre, la théorie des séries trigonométriques, qui doit encore à M. Lebesgue ses plus importants progrès, a été complètement refondue et mise au niveau des connaissances actuelles. Par contre, faute de place, nous avons sacrifié la théorie des intégrales eulériennes qui figurait dans la première édition, pensant qu'elle se rencontre aussi très naturellement comme illustration des propriétés des fonctions analytiques.

Comme précédemment, le petit texte est réservé aux questions plus élevées ou plus spéciales qu'on peut laisser de côté dans une première lecture.

C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Louvain, le 15 mai 1912.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

Théorie élémentaire des intégrales multiples

CHAPITRE II

Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégration des différentielles totales exactes.

CHAPITRE III

Intégrales multiples de Riemann et de Lebesgue

CHAPITRE IV

Approximation et représentation analytique des fonctions. Séries de polynomes et séries trigonométriques.

CHAPITRE V

Equations différentielles ordinaires. Généralités. Equations du premier ordre.

CHAPITRE VI

Equations différentielles ordinaires (suite) Equations d'ordre supérieur au 1er. Systèmes d'équations.

CHAPITRE VII

Equations linéaires aux dérivées partielles et aux différentielles totales.

CHAPITRE VIII

Notions sur le calcul des variations et le calcul des différences.

CHAPITRE IX

Applications géométriques complémentaires.

CHAPITRE I.

Théorie élémentaire des intégrales multiples.

§ 1. Intégrales doubles.

1. Notions relatives à un domaine D à deux variables. — Rapportons les variables x et y à deux axes rectangulaires. Traçons dans le plan xy un *contour simple*, c'est-à-dire un contour fermé qui ne se coupe pas lui-même. Ce contour enveloppe une portion C du plan. Si le point M (x, y) représentatif du système de variables x, y, peut prendre toutes les positions comprises dans l'intérieur du contour C et sur ce contour lui-même, nous dirons que les variables x, y varient dans le *domaine* ou dans l'*aire* D.

Pour éviter toute obscurité, nous supposerons que le contour C peut se décomposer en un nombre limité de segments sur chacun desquels la variation de x et de y ne change pas de sens quand on parcourt le contour. Il est clair qu'un tel segment, à moins d'être lui-même parallèle à l'un des axes, ne peut être coupé qu'en un point par une parallèle à l'axe des x ou à l'axe des y.

Plus généralement, le domaine considéré D pourra s'étendre à la portion du plan intérieure à un contour C et extérieure à d'autres contours C', C'',.. soumis aux mêmes restrictions que C. Enfin le domaine D pourra se composer de plusieurs domaines séparés D', D''... définis comme le précédent. Dans ces divers cas, le domaine D est *à contour complexe*.

Les contours C, C',... constituent la *frontière* du domaine D. Cette frontière fait donc, par définition, partie du domaine lui-même.

Le *diamètre* d'un domaine D est le maximum de la distance de deux de ses points (donc de deux points de sa frontière).

On peut généraliser ces notions d'un domaine et de sa frontière, les définitions générales appartiennent à la théorie des ensembles [1].

[1] Voir l'Introduction, t. I, § 9

2. Propriétés des fonctions continues [1]. — *Une fonction $f(x, y)$ est continue en un point (a, b) du domaine D, si l'oscillation de cette fonction tend vers 0 dans toute portion du domaine D qui contient ce point et dont le diamètre tend vers 0.*

Une fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine D si elle est continue en tout point de ce domaine.

Les théorèmes suivants sont fondamentaux dans la théorie des intégrales doubles :

I. *S'il est impossible de décomposer, par des transversales parallèles aux axes, le domaine D en parties rectangulaires (sauf sur le bord) telles que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans chaque partie (ε étant un nombre positif donné), cette fonction $f(x, y)$ est discontinue dans le domaine D.*

En effet, si l'on partage par des transversales le domaine D en plusieurs parties, l'impossibilité de faire une semblable décomposition subsiste dans une au moins des parties (sinon elle n'aurait pas lieu pour l'ensemble). Donc on peut trouver, dans D, une partie D_1 de diamètre aussi petit qu'on veut, où la décomposition est impossible ; de même, dans D_1, une partie D_2 encore plus petite où la décomposition est encore impossible, et ainsi de suite indéfiniment. On peut ainsi former une suite de domaines D, D_1, D_2,... D_n,... dont chacun est intérieur à tous les précédents, dont les diamètres tendent vers zéro, où enfin l'oscillation de $f(x, y)$ demeure toujours $> \varepsilon$. Ces domaines convergent vers un point M qui appartient à tous les domaines D_n. Ce point M est donc intérieur à un domaine D_n aussi petit qu'on veut où l'oscillation de $f(x, y)$ est $> \varepsilon$. Donc $f(x, y)$ est discontinue en ce point.

II. *Si $f(x, y)$ est continue dans le domaine D, à tout nombre positif ε correspond un nombre δ tel que l'oscillation de cette fonction soit $< \varepsilon$ dans toute partie du domaine D de diamètre $< \delta$.*

Partageons, par le théorème précédent, le domaine D en rectangles et portions de rectangles où l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon : 2$. Soit δ le plus petit côté de tous ces rectangles. L'oscillation de $f(x, y)$ sera $< \varepsilon$ dans toute portion du domaine D assez petite pour ne pas s'étendre sur deux rectangles non contigus, donc dans toute portion de diamètre $< \delta$.

[1] Voir aussi l'Introduction (t. I, § 1 et 3)

III. *Soient x, y et x', y' deux points du domaine* D ; *à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* δ *tel qu'on ait*

$$| f(x', y') - f(x, y) | < \varepsilon,$$

sous les conditions $| y' - y | < \delta$ *et* $| x' - x | < \delta$.

En effet, il suffit de choisir δ de manière que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans tout carré de côté $< \delta$.

On énonce souvent cette dernière propriété en disant que, si le point x', y' du domaine D tend vers un autre point x, y du même domaine, $f(x', y')$ tend *uniformément* vers sa limite $f(x, y)$. C'est encore cette propriété qu'on veut exprimer quand on dit qu'*une fonction continue dans le domaine* D *est uniformément continue dans ce domaine.*

IV. *Si* $f(x, y)$ *est continue par tous les points d'ordonnée* β *et d'abscisse comprise dans un intervalle* (a, A), *à tout nombre positif* ε *correspond un nombre* δ, *tel que l'on ait, sous la condition* $| y - \beta | < \delta$, *et pour toute valeur de x dans l'intervalle* (a, A),

$$| f(x, y) - f(x, \beta) | < \varepsilon.$$

Supposons, par impossible, que le théorème soit en défaut *pour un nombre* ε *donné*. Partageons l'intervalle (a, A) de variation de x en deux moitiés ; le théorème sera en défaut pour une des deux moitiés, sinon il ne le serait pas pour l'ensemble. Partageons cette moitié en deux autres et ainsi de suite indéfiniment. Cette suite d'intervalles, où le théorème est en défaut, dont chacun est la moitié du précédent converge vers un point $x = \alpha$ intérieur à toute la suite. Ce point α appartient donc à un intervalle de variation de x aussi petit qu'on veut où le théorème est en défaut ; c'est-à-dire que, ε étant donné, on peut réaliser la condition

$$| f(x, y) - f(x, \beta) | > \varepsilon$$

pour y aussi voisin qu'on veut de β et x de α. Donc $f(x, y)$ serait discontinue au point α, β contrairement à l'hypothèse.

3. Continuité d'une intégrale définie par rapport à un paramètre. — Si l'on intègre par rapport à x une fonction $f(x, y)$ qui dépend d'un paramètre y, il est clair que le résultat sera une fonction $\varphi(y)$ de ce paramètre. Les théorèmes suivants feront savoir si cette fonction est continue :

I. *Si $f(x, y)$ est une fonction continue de x et de y dans le rectangle* R, *borné par les abscisses a et* A, *les ordonnées b et* B ; *plus généralement, si cette fonction est seulement bornée dans ce rectangle mais n'admet qu'un nombre limité de points de discontinuité pour chaque valeur particulière de y* [1], *l'intégrale*

$$\varphi(y) = \int_a^A f(x, y)\, dx$$

est une fonction continue de y dans l'intervalle (b, B).

Soit, en effet, β une valeur particulière de y dans cet intervalle, nous allons montrer que $\varphi(y)$ est continue au point β.

Supposons d'abord que $f(x, y)$ n'ait aucun point de discontinuité d'ordonnée β entre les abscisses a et A. Considérons alors la relation

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| \leqslant \int_a^A |f(x, y) - f(x, \beta)|\, dx$$

et appliquons le théorème IV qui précède.

Quelque petit que soit ε, on peut supposer, dans cette dernière intégrale,

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| < \varepsilon,$$

sous la condition $|y - \beta| < \delta$. Alors il vient, par le théorème de la moyenne,

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| < \varepsilon(A - a).$$

Donc la variation de $\varphi(y)$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, et cette fonction est continue au point β.

Cette démonstration s'étend facilement au cas où $f(x, y)$ possède un nombre limité de points de discontinuité d'ordonnée β. En effet, admettons, pour fixer les idées, qu'il n'y en ait qu'un seul et que son abscisse α soit intermédiaire entre a et A. Désignons par ε un nombre positif arbitraire, et faisons la décomposition

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| \leqslant \int_a^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{A} + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} |f(x,y) - f(x, \beta)|\, dx.$$

On peut d'abord rendre la dernière intégrale aussi petite que l'on veut avec ε, car, si M désigne le maximum absolu de f, cette intégrale est $< 4M\varepsilon$ par le théorème de la moyenne. Après cela, les deux intégrales précédentes sont aussi petites que l'on veut avec $|y - \beta|$ comme dans le cas précédent, car le point de discontinuité d'or-

[1] Le théorème et sa démonstration s'étendent sans difficulté au cas où l'ensemble de ces points de discontinuité est de mesure nulle (L).

donnée β en est exclu. Donc la variation de $\varphi(y)$ peut encore être rendue aussi petite qu'on veut, et $\varphi(y)$ est continue au point β.

II. Considérons maintenant une intégrale dont les limites $x_1 = \psi_1(y)$ et $x_2 = \psi_2(y)$ sont deux fonctions continues de y dans l'intervalle (b, B). Soit

$$\varphi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$

cette intégrale. *Ce sera encore une fonction continue de y dans l'intervalle (b, B) pourvu que la fonction $f(x, y)$ soit continue dans le domaine* D [1] *compris entre les deux courbes $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ et les deux droites $y = b$ et $y = B$; ou, plus généralement, pourvu que $f(x, y)$ soit bornée dans le domaine* D *et n'ait, dans ce domaine, qu'un nombre limité de points de discontinuité pour chaque valeur particulière de y.*

Ce théorème se ramène au précédent. En effet, le domaine D peut être compris dans un rectangle R limité par les ordonnées b et B et deux abscisses convenables a et A. Désignons par $f_1(x, y)$ une fonction égale à $f(x, y)$ en tout point de D et à 0 en dehors de D. Cette fonction n'a pas d'autres points de discontinuité dans le rectangle R que ceux de f dans le domaine D et les points de la frontière de ce domaine. Il n'y en a donc qu'un nombre limité pour chaque valeur de y. Par suite, l'intégrale

$$\int_a^A f_1(x, y)\, dx$$

est fonction continue de y dans l'intervalle (b, B). Or cette intégrale se réduit à $\varphi(y)$ à cause de la définition de f_1, ce qui prouve le théorème.

4. Définition d'une intégrale double dans un rectangle par des intégrales simples. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans le rectangle R compris entre les abscisses a et A, les ordonnées b et B. L'intégrale, effectuée en considérant y comme une constante,

$$\int_a^A f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

est donc une fonction continue de y dans l'intervalle (b, B) et peut, par conséquent, s'intégrer dans cet intervalle. Cette intégration fournit l'expression suivante :

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx, \tag{2}$$

[1] Ce domaine n'est pas astreint aux conditions du n° 1.

qui renferme deux signes d'intégration superposés et que l'on appelle, pour cela, une *intégrale double*. Les variables x et y que renferme cette intégrale varient dans le rectangle R. Celui-ci s'appelle l'*aire*, le *domaine*, ou le *champ d'intégration*.

Nous avons d'abord supposé $f(x, y)$ continue dans le domaine R, mais l'expression (2) conserve un sens sous des conditions plus générales.

Supposons, en effet, que $f(x, y)$, tout en restant bornée dans le rectangle R, y devienne discontinue et que les points de discontinuité se répartissent sur *un nombre limité* de lignes continues que nous appellerons les *lignes de discontinuité*. Les points de discontinuité pourront d'ailleurs être disséminés sur ces lignes ou les remplir entièrement ; de sorte qu'il pourra y avoir des points de discontinuité isolés.

L'intégrale double conservera un sens parfaitement clair si les lignes de discontinuité se composent exclusivement de parallèles aux axes coordonnés et de lignes n'admettant qu'un nombre limité d'intersections par des parallèles aux axes.

En effet, d'après le théorème I du n° précédent, l'intégrale (1) demeure fonction continue de y, sauf pour les valeurs exceptionnelles qui correspondent à une ligne de discontinuité parallèle à l'axe des x. Mais comme l'intégrale reste finie pour ces valeurs exceptionnelles de y, dont le nombre est limité, elle représente encore une fonction intégrable de y dans l'intervalle (b, B) et l'expression (2) conserve une valeur déterminée.

Nous supposerons donc dorénavant que, si $f(x, y)$ n'est pas continue dans le rectangle R, ses discontinuités satisfont aux conditions précédentes.

L'intégrale double jouit d'une propriété fondamentale qui va nous permettre d'en transformer la définition et que voici :

L'intégrale double est comprise entre mR *et* MR, m *et* M *étant les bornes inférieure et supérieure de* $f(x, y)$ *dans le domaine d'intégration et* R *l'aire du domaine.*

On a, en effet, par le théorème de la moyenne,

$$m(A-a) < \int_a^A f(x, y)\, dx < M(A-a).$$

Multiplions ces inégalités par dy, intégrons de b à B et remarquons que $(A - a)(B - b) = R$; il vient

$$(3) \qquad mR \leqq \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx \leqq MR.$$

5. Définition d'une intégrale double dans un rectangle par des limites de sommes. — Partageons le rectangle R par un réseau à mailles rectangulaires, formé de deux systèmes de droites, les premières parallèles à l'axe des y et ayant successivement pour abscisses : $x_1 = a, x_2, .., x_{n+1} = A$, les autres parallèles à l'axe des x et ayant successivement pour ordonnées : $y_1 = b, y_2, ... y_{m+1} = B$. Appelons α_{ik} l'aire de la maille comprise entre x_i et x_{i+1}, y_k et y_{k+1} ; enfin soient M_{ik} et m_{ik} les bornes supérieure et inferieure de $f(x, y)$ dans la maille α_{ik}. La relation (3), appliquée au rectangle α_{ik}, donne

$$m_{ik}\, \alpha_{ik} \leqq \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx \leqq M_{ik}\, \alpha_{ik}.$$

Additionnons toutes les inégalités comprises dans les précédentes par la variation des indices i, k ; il viendra

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, \alpha_{ik} \leqq \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_{ik}\, \alpha_{ik}.$$

On voit que l'intégrale double est comprise entre deux sommes doubles. Je dis qu'elle est la limite commune de ces deux sommes, quand on fait décroître indéfiniment les mailles du réseau dans les deux sens, le nombre de ces mailles augmentant indéfiniment.

Pour établir ce théorème, il suffit de montrer que la différence des deux sommes doubles, savoir

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (M_{ik} - m_{ik})\, \alpha_{ik},$$

a pour limite zéro.

Cette conclusion est immédiate si la fonction $f(x, y)$ est continue dans le domaine R, car, suivant le théorème II du nº 2, toutes les oscillations $M_{ik} - m_{ik}$ décroissent alors en-dessous de tout nombre positif donné ε quand les domaines α_{ik} tendent vers 0. Par conséquent, la somme (4) décroit en même temps en dessous de tout nombre donné, car, quand les oscillations sont toutes $< \varepsilon$, elle est inférieure à $\varepsilon\Sigma\Sigma\alpha_{ik} = \varepsilon R$.

Cette conclusion subsiste si $f(x, y)$, restant bornée, est discontinue, pourvu que les lignes de discontinuité satisfassent aux conditions du n° précédent. En effet, les oscillations $M_{ik} - m_{ik}$ décroissent encore en dessous de ε dans tous les éléments α_{ik} quand ceux ci tendent vers 0, sauf peut-être dans les éléments touchés par les lignes de discontinuité ou dans des éléments qui s'approchent indéfiniment de ces lignes. Mais, comme les lignes de discontinuité peuvent être enfermées dans un domaine d'aire aussi petite qu'on veut qui embrasse finalement tous les éléments exceptionnels, la somme de ces éléments exceptionnels tendra vers 0 et, avec elle, la somme des termes correspondants de l'expression (**4**). Donc la limite de cette expression est encore nulle.

Le théorème que nous venons d'établir peut, en supprimant seulement dans ce qui précède les doubles indices devenus inutiles, se formuler de la manière suivante :

L'intégrale double de $f(x, y)$ dans le rectangle R *est aussi la limite commune des deux sommes*

$$\sum_{R} m_i \alpha_i , \qquad \sum_{R} M_i \alpha_i ,$$

obtenues en décomposant R *en éléments rectangulaires infiniment petits α_i et en faisant la somme de tous ces éléments multipliés respectivement par les bornes inférieure m_i et supérieure M_i de $f(x, y)$ dans chacun d'eux.*

6. Théorème de l'interversion des intégrations. Nouvelle notation de l'intégrale double. — On peut intervertir les variables x et y dans tous les raisonnements du n° précédent. Comme d'ailleurs la définition de l'intégrale double comme limite de sommes ne dépend plus en rien de l'ordre dans lequel ces deux variables avaient été considérées, on obtient le théorème suivant :

La valeur de l'intégrale double dans le rectangle R *est indépendante de l'ordre dans lequel on fait les intégrations, c'est-à-dire que l'on a*

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx .$$

Dès lors, pour représenter une intégrale double dans le rectangle R, il est naturel d'adopter des notations qui rappellent à la fois sa définition comme limite de sommes et sa réduction à des intégrales

simples consécutives. Nous nous servirons des symboles suivants :

$$\iint_R f(x, y)\, dR \qquad \text{ou} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

La quantité $f(x, y)\, dx\, dy$ sur laquelle porte la double intégration s'appelle l'*élément de l'intégrale double.*

7. Intégrale double dans un domaine de forme quelconque. — La définition de l'intégrale double comme limite de sommes s'étend, sans difficulté aucune, au cas d'un domaine limité par des courbes quelconques soumises aux restrictions du n° 1.

Soit D un domaine semblable. Considérons une fonction $f(x, y)$ continue dans ce domaine, ou, plus généralement, bornée et ayant des lignes de discontinuité soumises aux mêmes conditions que précédemment (n° 4). On peut, par deux systèmes de droites parallèles aux axes, décomposer D en éléments α_i infiniment petits. Tous ces éléments seront rectangulaires sauf sur le bord du domaine. Soient M_i et m_i les bornes supérieure et inférieure de $f(x, y)$ dans α_i. La définition de l'intégrale double dans D est fournie par le théorème suivant :

Les deux sommes étendues à tous les éléments de D,

$$(1) \qquad \sum_D M_i \alpha_i, \qquad \sum_D m_i \alpha_i,$$

tendent vers la même limite quand les éléments α_i décroissent indéfiniment dans les deux sens. Cette limite commune est l'intégrale double de $f(x, y)\, dx\, dy$ dans le domaine D *et elle se représente par les notations*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{ou} \qquad \iint_D f(x, y)\, dD.$$

En effet, cette limite se ramène aisément à une intégrale double dans un rectangle. Pour cela, circonscrivons au domaine D un rectangle R dont les côtés soient parallèles aux axes. Soient a et A les abscisses extrêmes, b et B les ordonnées extrêmes de ce rectangle.

Appelons $f_1(x, y)$ une fonction égale à $f(x, y)$ en tout point de D et à zéro en dehors de D. Les discontinuités de cette fonction seront soumises aux conditions présupposées de sorte que l'intégrale double de $f_1(x, y)$ dans R est bien déterminée.

Partageons R en éléments rectangulaires infiniment petits α_i, ce qui fournira, en même temps, le mode de partage de D. Formons, pour la fonction f_1 et pour le rectangle R entier, les deux sommes,

$$(2) \qquad \sum_R M_i \alpha_i, \qquad \sum_R m_i \alpha_i,$$

analogues aux sommes (1) du théorème qui nous occupe mais qui ont pour limite l'intégrale de f_1 dans R. Les termes relatifs aux éléments α_i situés hors de D sont nuls, ceux qui sont relatifs aux éléments α_i situés dans D sont les mêmes dans les sommes (2) que dans les sommes (1). Les sommes correspondantes $\sum\limits_D$ et $\sum\limits_R$ ne diffèrent donc, en réalité, que par les termes relatifs aux éléments α_i touchés par la frontière du domaine D. Mais, comme la somme de ces éléments, donc de ces termes, tend vers 0, les sommes $\sum\limits_D$ et $\sum\limits_R$ ont la même limite. Il vient ainsi, comme nous l'avons annoncé

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f_1(x, y)\, dR.$$

8. **Réduction aux intégrales simples.** — *L'intégrale double dans le domaine* D *peut aussi se réduire à des intégrales consécutives par rapport à x et à y,*

On a, en effet, d'après ce qui précède,

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f_1(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f_1(x, y)\, dy\,.$$

Supposons, ce qui est un cas très habituel, que le contour du domaine D ne soit coupé qu'en deux points par une parallèle à l'axe des x ou par une parallèle à l'axe des y. Alors, pour chaque valeur de x entre a et A, y varie entre deux valeurs y_1 et y_2 fonctions de x ; de même, pour chaque valeur de y entre b et B, x varie entre deux valeurs x_1 et x_2 fonctions de y. On peut, dans les formules précédentes, supprimer les intervalles d'intégration où f_1 est nulle, et, comme $f_1 = f$ dans les intervalles restants, il vient

$$\iint_D (x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy.$$

Plus généralement, quel que soit le contour du domaine D, on peut écrire la formule de réduction sous la forme

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int dy \int f(x, y)\, dx = \int dx \int f(x, y)\, dy\,.$$

Mais il faut interpréter ce résultat comme il suit :

Supposons qu'on intègre d'abord par rapport à x, puis par rapport à y. Considérant y comme constant, on intègre par rapport à x dans tous les intervalles où $f_1 = f$, c'est à dire dans tous ceux qui four-

nissent, pour cette valeur de y, des points (x, y) du domaine D. En d'autres termes, l'intégration par rapport à x s'étend à la *section* du domaine D par la droite d'ordonnée y. Le resultat est une fonction de y, que l'on intègre ensuite par rapport à y entre les limites extrêmes du domaine D.

9. Propriétés de l'intégrale double. — I. *Soient* D *l'aire du domaine d'intégration*, M *et* m *les bornes supérieure et inférieure de* $f(x, y)$ *dans* D; *on a*

$$MD > \iint_D f(x, y)\, dD > mD.$$

En effet, l'intégrale double est la limite commune des deux sommes $\Sigma M_i \alpha_i$ et $\Sigma m_i \alpha_i$, toutes deux comprises entre $M\Sigma\alpha_i$ et $m\Sigma\alpha_i$, c'est-à-dire entre MD et mD.

II. Si l'on pose, en particulier, $f = 1$, on obtient l'aire du domaine d'intégration sous forme d'intégrale double

$$D = \iint_D dx\, dy.$$

III. *Si l'on décompose le domaine D en plusieurs parties par des transversales, l'intégrale dans* D *est la somme des intégrales prises dans chaque partie.*

Nous pouvons supposer, dans la démonstration, qu'on ait décomposé D en deux parties seulement D′ et D″ par une transversale, car le raisonnement s'étend de proche en proche aux autres cas.

Couvrons alors D d'un réseau à mailles rectangulaires α_i comme précédemment, et considérons la somme $\Sigma M_i \alpha_i$ qui a pour limite l'intégrale dans D. Abstraction faite des éléments α_i touchés par la transversale, elle se compose des deux sommes qui ont pour limites les intégrales dans D′ et dans D″. Mais les éléments touchés par la transversale donnent des sommes qui tendent vers zéro. On ne commet pas d'erreur en les négligeant, ce qui prouve le théorème.

10. Généralisation de la définition d'une intégrale double. — Soit D un domaine d'intégration. Décomposons-le par des transversales droites ou courbes en éléments d'aires bien déterminées α_i. Soient m_i et M_i les bornes de $f(x, y)$ dans α_i :

L'intégrale double de $f(x, y)$ *dans l'aire* D *est la limite commune des deux sommes*

$$\Sigma M_i \alpha_i, \qquad \Sigma m_i \alpha_i,$$

étendues à tous les éléments de l'aire D, *quand tous les éléments* α_i *décroissent indéfiniment dans tous les sens.*

On a, en effet, par la propriété I du n° précédent,

$$M_i \alpha_i \geqslant \iint_{\alpha_i} f(x, y)\, d\alpha_i \geqslant m_i \alpha_i .$$

Faisons la somme de toutes les inégalités analogues ; il vient, par la propriété III,

$$\Sigma\, M_i \alpha_i \geqslant \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geqslant \Sigma\, m_i \alpha_i .$$

Donc les deux sommes extrêmes ont pour limite l'intégrale double, car on va voir que leur différence $\Sigma\,(M_i - m_i)\,\alpha_i$ a pour limite 0.

Cette conclusion est immédiate si $f(x, y)$ est continue, car toutes les différences $(M_i - m_i)$ tendent alors uniformément vers 0. Elle subsiste si $f(x, y)$ est discontinue dans les mêmes conditions que ci-dessus, car le raisonnement fait au n° 5 s'applique aussi bien au cas actuel.

On peut encore modifier la définition précédente comme il suit :

L'intégrale double de $f(x, y)$ *dans* D *est la limite de la somme*

$$\Sigma\, f(\xi_i, \eta_i)\, \alpha_i$$

où ξ_i, η_i *est un point arbitraire de* α_i *et qui s'étend à tous les éléments* α_i *de l'aire* D, *quand tous ces éléments décroissent indéfiniment dans tous les sens.*

En effet, $f(\xi_i, \eta_i)$ est compris entre m_i et M_i, par conséquent, la somme considérée dans ce nouvel énoncé est intermédiaire entre les deux sommes de l'énoncé précédent.

11. Théorème de la moyenne. — Si $\varphi(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine D, et si $f(x, y)$ est compris entre les limites m et M, l'intégrale

$$\iint_D f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

sera comprise entre les deux suivantes :

$$m \iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad M \iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

C'est en cela que consiste le *théorème de la moyenne*, qui est l'analogue du théorème correspondant sur les intégrales simples et dont la démonstration est tout aussi immédiate. On remarque que le théorème I du n° 9 en est un cas particulier.

12. Intégrales curvilignes. Formule de Green pour le plan. — Considérons un arc de courbe plane L admettant la représentation paramétrique

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

où x et y sont des fonctions continues de t qui décrivent l'arc L quand le point t varie de t_1 à T. Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions continues de x et y. Décomposons l'intervalle t_1T par les points consécutifs $t_1, t_2, \dots t_n, t_{n+1} = T$. Soient x_i, y_i les valeurs de x, y au point t_i. Formons les deux sommes $(i = 1, 2, \dots n)$

$$\sum_i P(x_i, y_i)\ (x_{i+1} - x_i), \qquad \sum_i Q\ (x_i, y_i)\ (y_{i+1} - y_i).$$

Quand les valeurs successives de t se rapprochent indéfiniment, les valeurs de x et celles de y sont dans le même cas, et les deux sommes précédentes tendent généralement vers des limites déterminées, que l'on représente respectivement par

$$\int_L P(x, y)\, dx, \qquad \int_L Q(x, y)\, dy.$$

Ces deux expressions et leur somme

$$\int_L P\, dx + Q\, dy$$

sont ce que l'on appelle des *intégrales curvilignes effectuées sur la ligne* L.

Leur existence a été établie dans le *t*. 1 (nº 346) sous la seule condition que la ligne L soit rectifiable. Nous nous contenterons ici de l'établir dans l'hypothèse plus simple où la ligne L se décompose en un certain nombre de segments sur chacun desquels les variations de x et de y ne changent pas de sens. Le raisonnement étant analogue pour l'autre somme, il suffira d'ailleurs de raisonner sur la première :

$$\Sigma\, P(x_i, y_i)\ (x_{i+1} - x_i)\ ;$$

et nous allons montrer que sa limite se ramène à des intégrales définies ordinaires par rapport à la variable x.

Si x varie constamment dans le même sens de a à b quand le point (x, y) parcourt la ligne L, l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$y = \varphi_1(x)$$

où φ_1 est une fonction continue entre a et b et l'on voit immédiatement que la limite de la somme précédente est, par définition, l'intégrale définie

$$\int_a^b P(x, \varphi_1)\, dx.$$

Si la ligne L était parallèle à l'axe des y, x serait constant et l'intégrale serait nulle.

Si la ligne L se composait de plusieurs segments sur chacun desquels x varie dans le même sens, l'intégrale curviligne se ramènerait à une intégrale ordinaire relative à x sur chaque segment, et l'intégrale sur L serait leur somme.

Revenons maintenant à la représentation paramétrique de la ligne L et supposons que les fonctions x et y de t aient des dérivées continues x' et y' entre t_1 et T. On pourra transformer les intégrales relatives à x en prenant t comme variable d'intégration. Il viendra ainsi

$$\int_L \mathrm{P}(x, y)\, dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(x, y)\, x'\, dt.$$

On trouvera d'une manière analogue

$$\int_L \mathrm{Q}(x, y)\, dy = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}(x, y)\, y'\, dt$$

et, par conséquent, en ajoutant,

$$\int_L \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} (\mathrm{P}x' + \mathrm{Q}y')\, dt.$$

Ces formules subsistent évidemment si les dérivées x' et y' sont discontinues en un nombre limité de points mais restent bornées.

Si l'on changeait le sens du parcours sur la ligne L, cela renverserait le sens des limites dans les intégrales définies relatives à x, à y ou à t et, par conséquent, l'intégrale curviligne changerait de signe. Soit A et B les extrémités de la ligne L ; quand on veut faire apparaître le sens du parcours dans la notation de l'intégrale curviligne, on remplace l'indice L par AB ou par BA. On a ainsi

$$\int_{AB} \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy = -\int_{BA} \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy.$$

Examinons en particulier le cas où la ligne L est un contour C fermé sans point multiple.

Le tour de ce contour peut se faire dans le *sens direct* ou dans le *sens rétrograde*. Le sens direct est celui de la rotation de l'axe des x positifs vers celui des y positifs. Ordinairement c'est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre et il laisse l'origine à gauche. Dans ce cas, le sens direct sur le contour C sera celui qui laisse à gauche l'intérieur du contour.

Dans le cas d'un contour fermé C, on convient de représenter par la notation

$$\int_C P dx + Q dy$$

l'intégrale effectuée dans le sens direct.

Green a fait usage d'une formule importante qui ramène une intégrale double à une intégrale curviligne et à laquelle on a donné son nom. Nous allons la faire connaître.

Considérons un domaine D limité par un contour fermé C. Supposons d'abord que ce contour (fig. 1) se compose de deux arcs de courbes RS et PQ et de deux parallèles à l'axe des y, RP et SQ. Les ordonnées y_1 et y_2 ($y_2 > y_1$) des deux courbes sont supposées fonctions continues de x dans l'intervalle (a, A) correspondant aux deux arcs considérés. Nous admettons d'ailleurs que les deux arcs puissent se rejoindre par leurs extrémités, auquel cas l'une des droites du contour C ou toutes les deux disparaîtront. Soit alors $P(x,y)$ une fonction continue et uniforme ainsi que sa dérivée $\frac{\partial P}{\partial y}$ dans le domaine D. On aura, par la formule du nº 8,

Fig. 1.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^A P(x, y_2)\, dx - \int_a^A P(x, y_1)\, dx.$$

Ces deux dernières intégrales simples sont des intégrales curvilignes. La première est effectuée sur l'arc PQ le seconde sur l'arc RS. Il vient donc

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{QP} P\, dx - \int_{RS} P\, dx.$$

Or je dis que ce résultat peut s'écrire encore

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_C P\, dx.$$

En effet, quand on suit le contour C dans le sens direct, on parcourt successivement les deux arcs RS et QP et les deux droites SQ et PR ; mais, l'intégrale étant nulle sur ces deux droites, il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

La formule précédente s'étend sans peine à une aire D entourée par

un contour C de forme quelconque, pourvu que ce contour satisfasse aux conditions du n° 1. En effet, on peut alors par des transversales décomposer D en morceaux D_1, D_2,... limités par des contours semblables à celui sur lequel nous venons de raisonner. L'intégrale double dans chaque morceau se ramène à une intégrale curviligne. En faisant la somme de ces intégrales doubles, on obtiendra l'intégrale dans D. D'autre part, la somme de ces intégrales curvilignes se réduira à l'intégrale sur C, car celles qui sont prises sur les transversales disparaissent. En effet, chaque transversale est parcourue deux fois en sens contraire suivant qu'on la considère comme frontière de l'un ou de l'autre des deux morceaux qu'elle sépare, et les deux intégrales correspondantes se détruisent.

Soit maintenant $Q(x, y)$ une autre fonction continue dans l'aire D ainsi que sa dérivée $\frac{\partial Q}{\partial x}$; la formule

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_C Q\, dy$$

s'établit comme la précédente. En retranchant les deux équations l'une de l'autre, il vient enfin

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_D P\, dx + Q\, dy.$$

Telle est la *formule de Green*. Elle ramène le calcul de l'intégrale double dans D à celle d'une intégrale effectuée sur le contour de l'aire.

Nous avons déjà rencontré dans la première partie du cours certaines applications de cette formule. Posons $Q = x$ et $P = -y$; il viendra

$$\int_C (x\, dy - y\, dx) = 2\int\int_D dx\, dy = 2\, D.$$

C'est l'une des formules qui expriment l'aire D intérieure au contour C par une intégrale sur le contour. Les deux autres :

$$D = -\int_C y\, dx = \int_C x\, dy,$$

s'obtiennent d'une manière analogue en posant $Q = 0$, $P = -y$ ou $Q = x$, $P = 0$.

13. Intégrales triples. — Les considérations précédentes s'étendent à un système de trois variables x, y, z. On est ainsi conduit à la

notion des *intégrales triples*. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats suivants, les démonstrations se faisant comme pour les intégrales doubles :

Faisons varier le point x, y, z dans un prisme rectangulaire R, borné par les valeurs a et A de x, b et B de y, c et C de z. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue de x, y, z dans ce domaine, ou, plus généralement, une fonction bornée dont les points de discontinuité se répartissent sur un nombre limité de surfaces *planes* ou *courbes* appelées *surfaces de discontinuité*. Les surfaces *courbes* sont d'ailleurs soumises à certaines restrictions. Il faut qu'en les coupant par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, le système de *lignes de discontinuité* qui en résulte satisfasse aux conditions imposées jusqu'ici à ces lignes dans le plan de deux variables.

Ceci posé, formons l'expression, bien déterminée :

$$(1) \qquad \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z)\, dz,$$

qui résulte de trois intégrations consécutives, la première par rapport à z en considérant x, y comme constants, la deuxième par rapport à y en considérant x comme constant, la troisième par rapport à x. Cette expression est une *intégrale triple étendue au domaine* R.

On peut la définir aussi comme une limite de sommes :

L'intégrale triple dans R *est la limite commune des deux sommes*

$$\Sigma\, m_i \alpha_i, \quad \Sigma\, M_i \alpha_i,$$

obtenues en décomposant le domaine R *en éléments prismatiques infiniment petits* α_i *par trois systèmes de plans respectivement parallèles aux plans coordonnés, et en faisant la somme de tous ces éléments multipliés respectivement par les bornes inférieure* m_i *et supérieure* M_i *de* $f(x,y,z)$ *dans chacun d'eux.*

L'ordre des variables n'intervient plus dans cette définition, d'où le théorème :

Si l'on intègre successivement une même fonction $f(x, y, z)$ *par rapport aux trois variables* x, y, z *entre des limites constantes, le résultat ne dépend aucunement de l'ordre dans lequel on effectue ces trois intégrations.*

La définition de l'intégrale triple s'étend aussi à un domaine D limité par une surface fermée de forme quelconque qui en fait la frontière. Toutefois, pour que la précédente théorie des intégrales doubles puisse se généraliser, il faut assigner des restrictions à cette frontière.

Supposons que l'on coupe le domaine D par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés, par exemple par le plan d'ordonnée z. Les points du domaine D qui appartiennent au plan z forment un domaine à deux variables x, y, que l'on appelle *la section* du domaine D par le plan z. Nous admettons que le contour de cette section satisfait aux conditions que nous avons imposées précédemment à la frontière d'un domaine à deux variables et qu'il en est de même pour toute autre section parallèle à l'un des plans coordonnés.

L'intégrale triple de $f(x, y, z)$ dans un domaine D *de forme quelconque est la limite commune des deux sommes $\Sigma M_i \alpha_i$ et $\Sigma m_i \alpha_i$ que l'on obtient en décomposant, par des surfaces quelconques,* D *en volumes α_i infiniment petits en tous sens et en faisant la somme de ces éléments α^i multipliés respectivement par les bornes supérieure M_i et inférieure m_i de $f(x, y, z)$ dans chacun d'eux. Cette limite se désigne par*

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

Le *théorème de la moyenne* s'étend aux intégrales triples. Nous en énoncerons seulement le cas particulier suivant. Si l'on désigne par D le volume du domaine d'intégration et par μ une valeur moyenne de f dans ce domaine, on peut écrire

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \mu\, D. \tag{3}$$

En particulier, si $f = 1$, il vient

$$D = \iiint_D dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

ce qui donne l'*expression générale d'un volume* sous forme d'intégrale triple.

14. Réduction des intégrales triples. — Considérons l'intégrale étendue à un domaine de forme quelconque

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Cette intégrale se ramène aisément à une autre prise dans un domaine prismatique. Soient a et A les valeurs extrêmes de x, b et B celles de y, c et C celles de z dans le domaine D. Le prisme R borné par ces trois couples de valeurs contiendra le domaine D. Donc, si l'on désigne par f_1 une fonction égale à f en tout point de D et à zéro en dehors, on aura

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_R f_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

L'intégrale dans R se calcule par trois intégrations simples consécutives, effectuées par rapport à x, y, z dans un ordre arbitraire. On peut, par exemple, la réduire à

$$(5) \qquad \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f_1(x, y, z)\, dz.$$

Considérons le résultat des deux premières intégrations :

$$\int_b^B dy \int_c^C f_1(x, y, z)\, dz.$$

C'est une intégrale double étendue à un rectangle et dans laquelle on regarde x comme constant. On peut remplacer cette intégrale double par une autre portant sur la fonction f. Il suffit, pour cela, de réduire le champ d'intégration au domaine dans lequel $f = f_1$. Ce domaine n'est autre que la section du domaine D par le plan x ; en la désignant par S_x, l'intégrale précédente devient

$$\iint_{S_x} f(x, y, z)\, dy\, dz,$$

et l'intégrale triple prend la forme

$$(6) \qquad \int_a^A dx \iint_{S_x} f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

L'intégrale double pouvant se calculer par deux intégrales simples effectuées par rapport à y et à z, l'intégrale triple se ramènera donc à trois intégrations consécutives sur la fonction f.

C'est ce qu'on exprime par la relation générale

$$(7) \qquad \iiint_D f\, dx\, dy\, dz = \int dx \int dy \int f dz$$

La première intégration est effectuée par rapport à z, on suppose x, y donnés et l'intégration s'étend aux valeurs de z pour lesquelles

le point (x, y, z) appartient à D. La seconde intégration s'étend aux valeurs de y pour lesquelles (x étant donné) la droite x, y rencontre D, la troisième à toutes les valeurs de x auxquelles correspondent des points de D.

On peut permuter les intégrations, mais il faut aussi permuter les lettres dans la règle précédente, ce qui entraînera généralement une modification des limites.

§ 2. Déterminants fonctionnels. Transformation des intégrales doubles.

15. Déterminant fonctionnel ou jacobien. — Soient u, v deux variables indépendantes ; x, y deux fonctions :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

continues ainsi que leurs dérivées partielles premières. Le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

se nomme *déterminant fonctionnel* ou *jacobien* de x, y par rapport à u, v. Il se représente par le symbole

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

qui rappelle la notation des dérivées. Et, en effet, nous allons voir que le déterminant fonctionnel possède des propriétés analogues à celles de la dérivée. Nous signalerons les suivantes :

I. Les variables u, v peuvent être elles-mêmes des fonctions de deux nouvelles variables indépendantes u', v', admettant aussi des dérivées partielles continues, auquel cas on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u'} & \frac{\partial x}{\partial v'} \\ \frac{\partial y}{\partial u'} & \frac{\partial y}{\partial v'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

et, d'après la règle de la multiplication des déterminants,

$$\frac{d(x, y)}{d(u', v')} = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(u', v')}$$

Cette formule est analogue à celle de la dérivation des fonctions de fonctions.

II. Quand $u' = x$ et $v' = y$, la formule précédente devient

$$1 = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(x, y)}$$

Donc le jacobien de x, y par rapport à u, v est l'inverse de celui de u, v par rapport à x, y, ce qui rappelle la règle de dérivation des fonctions inverses.

Cette règle suppose évidemment l'existence des fonctions inverses u, v de x, y. Mais on peut s'en assurer par le théorème suivant :

III. Si les fontions x, y prennent les valeurs x_0, y_0 au point u_0, v_0 et que leur jacobien J ne s'annule pas en ce point, on peut réciproquement considérer u, v comme des fonctions de x, y, continues dans le voisinage du point x_0, y_0 et qui prennent les valeurs u_0, v_0 au point x_0, y_0. Ces fonctions sont uniformes et admettent des dérivées partielles.

C'est l'application du théorème du n° 170 de la première partie du cours.

La définition du jacobien s'étend à un nombre quelconque de fonctions $x_1, x_2, \ldots x_n$ du même nombre de variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots u_n$. On pose

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{d(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d(u_1, u_2, \ldots u_n)}$$

Les propriétés I, II, III se généralisent évidemment d'elles-mêmes,

IV. Voici encore une propriété qui généralise la règle de dérivation des fonctions composées. Soient x et y deux fonctions données de ξ, η, ζ :

$$x = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Si ξ, η, ζ dépendent de deux variables u. v, les variables x et y sont des fonctions composées de u, v. Nous allons démontrer qu'on a

$$(1) \quad \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}$$

Il y a autant de termes dans le second membre que de combinaisons

des lettres ξ, η, ζ deux à deux. Comme cette formule s'étend facilement à des séries plus nombreuses de variables, nous allons en donner une démonstration facile à généraliser.

Remplaçons d'abord, dans $d(x, y) : d(u, v)$, x seul par $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, donc $\frac{dx}{du}$ par $\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{du} + \cdots$ etc. Ce déterminant se décompose en une somme d'autres :

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d(\xi, y)}{d(u, v)} + \frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d(\eta, y)}{d(u, v)} + \frac{d\varphi}{d\zeta}\frac{d(\zeta, y)}{d(u, v)}.$$

C'est une expression linéaire des déterminants fonctionnels de (ξ, y). (η, y), (ζ, y). Remplaçons maintenant dans ceux-ci y par $\psi(\xi, \eta, \zeta)$; ils vont s'exprimer à leur tour linéairement au moyen de ceux de (ξ, η), (η, ζ), (ζ, ξ), car ceux de (ξ, ξ),... sont nuls. Portons ces valeurs dans l'expression précédente, il vient

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = A\frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} + B\frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} - C\frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)}$$

Dans cette équation, les paramètres A, B, C ne dépendent que de la forme des fonctions φ et ψ par rapport à ξ, η, ζ et non de celle de ξ, η, ζ par rapport à u, v. On peut donc les déterminer pour un choix particulier de u, v. On trouve immédiatement A en posant $u = \xi$, $v = \eta$ et ζ indépendant de u, v, ce qui réduit le second membre à A ; B et C se déterminent d'une manière analogue, et l'on obtient la formule (**1**).

16. Correspondance de deux aires D et D′ ; uniforme, directe ou inverse. Calcul d'une aire en coordonnées curvilignes. — Rapportons les variables u, v à deux axes rectangulaires Ou et Ov ; les variables x, y à deux axes rectangulaires Ox et Oy, Les formules

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

que nous supposons vérifier les conditions du n° précédent, établissent un certain mode de correspondance entre les points du plan uv et ceux du plan xy. Nous supposons qu'elles font correspondre les points d'une aire D′ intérieure à un contour C′ dans le plan xy à ceux d'une aire D intérieure à un contour C dans le plan uv.

La correspondance sera *uniforme* si à tout point de D correspond un point de D′ et un seul, à tout point de D′ un point D et un seul. En d'autres termes, elle sera uniforme si à tout contour fermé décrit par le point (u, v) correspond un contour fermé décrit par le point (x, y) et réciproquement. Il est clair que les contours C et C′ des deux aires se correspondront alors en particulier. On trouvera au

n° 18 un théorème général relatif à l'uniformité de la correspondance de deux aires.

La correspondance est *directe* si les points correspondants (u, v) et (x, y) décrivent en même temps leurs contours fermés dans le même sens (direct ou rétrograde) : elle sera *inverse* si les sens des parcours sont opposés pour ces deux points. Cette définition suppose évidemment que le mode de correspondance est le même pour tous les contours fermés que l'on peut tracer dans l'aire D.

Le mode de correspondance dépend du déterminant fonctionnel

$$J = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

L'examen approfondi de cette dépendance exige une analyse assez abstraite qu'on trouvera au numéro 18 Nous supposerons seulement ici que le déterminant J ne change pas de signe dans l'aire D et que la correspondance des deux aires D et D′ est uniforme. Proposons-nous d'évaluer l'aire D′ par une intégrale étendue à D. A cet effet, nous allons nous appuyer sur l'expression connue (n° 12) de l'aire D′ par une intégrale curviligne :

$$D' = \int_{C'} x dy.$$

Celle-ci se réduit à une intégrale ordinaire en considérant u, v et, par suite, x, y comme des fonctions d'une variable indépendante t qui varie de t_0 à T quand le point u, v décrit le contour C et le point x, y le contour C′. Nous supposons que x, y décrit C′ dans le sens direct, alors on a

$$D' = \int_{C'} x dy = \int_{t_0}^{T} x \frac{dy}{dt}\, dt = \int_{t_0}^{T} x \left(\frac{dy}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dt} \right) dt.$$

La dernière intégrale est la transformée en t de l'intégrale curviligne sur C

$$\varepsilon \int_C x \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right),$$

où ε désigne l'unité positive ou négative, $+1$ si le contour C est parcouru dans le sens direct, -1 s'il est parcouru dans le sens rétrograde.

Cette intégrale est encore égale à D′ et nous allons la transformer par la formule de Green. Posons

$$P = x \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Q = x \frac{\partial y}{\partial v},$$

d'où, en supposant l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = J\,;$$

il viendra

$$D' = \varepsilon \int_C (P du + Q dv) = \varepsilon \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv = \iint_D \varepsilon J\, du\, dv,$$

Observons que D' est positif et que J ne change pas de signe, il s'ensuit que $\varepsilon J = |\,J\,|$ et, par conséquent,

$$D' = \iint_D |\,J\,|\, du\, dv.$$

C'est la formule que nous voulions obtenir.

La quantité $|\,J\,|\, du\, dv$ sous le signe d'intégration s'appelle *l'élément de l'aire* D' dans le système de coordonnées curvilignes u, v. La formule précédente est la formule générale pour la quadrature des aires planes en coordonnées curvilignes.

Remarque. — Puisque εJ est positif, $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que J est positif ou négatif, donc les points (u, v) et (x, y) décrivent les contours C et C' dans le même sens ou dans des sens contraires suivant que J est positif ou négatif. Comme les mêmes raisonnements peuvent se faire sur une portion quelconque de l'aire D' et, par suite, sur un contour quelconque, il s'ensuit que la *correspondance des aires* D *et* D' *est directe ou inverse suivant que* J *est positif ou négatif.*

17. Généralisation de la démonstration précédente. — La démonstration précédente repose sur la transformation de Green

$$\int_C x\left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right) = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv,$$

que nous avons établie en admettant l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial^2 y}{du\, dv}$.

Mais cette condition est inutile, l'existence et la continuité des dérivées premières suffit. Nous démontrerons, en effet, dans le chapitre IV que, dans ce cas, on peut définir un polynome $P(u, v)$ qui converge vers y et dont les dérivées premières convergent vers celles de y, et cela *uniformément*. La formule précédente subsiste, sans difficulté, quand on remplace y par P dont toutes les dérivées existent. Elle subsiste donc, à la limite, pour y.

18. Théorème. — *Si le jacobien* J *de* x, y *par rapport à* u, v, *ne s'annule pas dans l'aire* D, *si, de plus, le point* x, y, *lié à* u, v, *décrit*

dans son plan un contour simple C′ *quand* u, v *décrit le contour* C *de l'aire* D, *les aires* D *et* D′ *respectivement intérieures à* C *et à* C′ *se correspondent uniformément.*

Désignons provisoirement par Δ le domaine du point x, y quand u, v varie dans le domaine D. Nous allons montrer d'abord que Δ ne peut avoir d'autre frontière que C′, et pour cela, que tout point x_0y_0 qui correspond à un point u_0v_0 de l'*intérieur* de D est lui-même *intérieur* à Δ. A cet effet, remarquons que, J n'étant pas nul, u et v sont fonctions continues de x et y et varient dans le voisinage de u_0v_0, donc dans D, quand x et y varient dans un domaine suffisamment petit autour de x_0y_0 ; donc ce domaine suffisamment petit fait partie du domaine Δ.

Le domaine Δ ayant C′ pour unique frontière et ne pouvant s'étendre à l'infini, ne peut être que la partie D′ du plan intérieur au contour C′.

Donc les aires D et D′ se correspondent. Il est clair que x, y décrit un contour fermé si u, v en décrit un. Pour établir l'uniformité de la correspondance, il reste à montrer que u, v décrit aussi un contour fermé en même temps que x, y.

Supposons, par impossible, qu'une ligne L qui joint deux points distincts u_0v_0 et u_1v_1 de l'aire D ait pour correspondante dans D′ une ligne fermée L′ partant du point x_0y_0 et y revenant. Nous allons montrer qu'il y a là une contradiction.

Puisque J ne s'annule pas, les variables u, v sont fonctions continues de x, y dans le voisinage de tout point de la ligne L′, de sorte que, si l'on déforme L′ d'une manière continue, la ligne correspondante L se déforme aussi d'une manière continue. On peut réduire par une déformation continue à la ligne L′ au seul point x_0y_0, sans en changer les extrémités qui coïncident en ce point. Donc la ligne L devrait se réduire en même temps à un seul point ses extrémités restant fixes aussi, chose impossible, puisque ces extrémités sont distinctes.

19. Changement de variables dans les intégrales doubles. — Soit $f(x, y)$ une fonction de x, y ayant une intégrale bien déterminée dans l'aire D′ considérée au nº 16. Proposons-nous de changer de variables dans cette intégrale par les relations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ du même numéro. Le problème consiste à remplacer l'intégrale dans D′ par une autre équivalente effectuée par rapport à u, v dans l'aire D. Il se résout par la formule

$$\iint_{D'} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(\varphi, \psi)\, |\, J\, |\, du\, dv.$$

Nous allons la démontrer.

Décomposons l'aire D en éléments infiniment petits α_i par des

transversales, l'aire D' en éléments infiniment petits α'_i par les transversales qui correspondent aux précédentes. Soient m_i et M_i les bornes de $f(x, y)$ dans α'_i ou de $f(\varphi, \psi)$ dans α_i ; il vient, par le théorème de la moyenne (nº 11),

$$m_i \iint_{\alpha_i} |\,J\,|\, du\, dv < \iint_{\alpha_i} |\,J\,|\, f(\varphi, \psi)\, du\, dv < M_i \iint_{\alpha_i} |\,J\,|\, du\, dv.$$

Les deux membres extrêmes ont respectivement pour valeurs $m_i \alpha'_i$ et $M_i \alpha'_i$ par la formule du nº 16. Donc, si l'on somme toutes les inégalités comprises dans les précédentes, il vient

$$\Sigma\, m_i \alpha'_i < \int_D |\,J\,|\, f(\varphi, \psi)\, du\, dv < \Sigma\, M_i \alpha'_i.$$

Or les deux membres extrêmes, par définition, ont pour limite commune l'intégrale de $f(x, y)$ dans D'. Cette intégrale est donc égale au terme du milieu, ce que nous voulions démontrer.

D'où la règle suivante :

Pour changer de variables dans une intégrale double, il faut remplacer x et y par leurs valeurs en fonctions des nouvelles variables u, v et l'élément d'aire $dxdy$ par l'élément d'aire dans le système de coordonnées u, v. On remplace le domaine d'intégration relatif à x, y par celui qui lui correspond dans le plan uv.

20. Transformation en coordonnées polaires. — C'est un cas particulier de la transformation générale. Le passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires se fait par les formules

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Le jacobien a pour valeur

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

La formule de transformation d'une intégrale par rapport à x, y en une autre par rapport à r, φ, sera donc

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

les domaines d'intégration se correspondant.

Exercices.

1. Si l'on pose $F(X, Y) = \int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy$, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = f(X, Y).$$

Réciproquement, si F satisfait à la seconde équation, on a

$$\int_a^X dx \int_b^Y f(x, y)\, dy = F(X, Y) - F(a, Y) - F(X, b) + F(a, b).$$

Etendre ces résultats à trois variables.

2. En considérant une intégrale double dans un triangle, démontrer que

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

3. Soit A une région du plan limitée par deux courbes de niveau d'une fonction continue $f(x, y)$, c'est-à-dire par deux lignes sur lesquelles f garde respectivement les valeurs constantes f_1 et f_2 ($f_1 < f_2$). On suppose que l'on trace les lignes de niveaux intermédiaires, que toutes ces lignes soient fermées et que l'on sache calculer l'aire E comprise dans l'intérieur de chaque ligne (f). Soient E_1 et E_2 les valeurs de E pour les lignes extrêmes, on aura, selon qu'on considèrera E comme fonction de f ou bien f comme fonction de E,

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{E_1}^{E_2} f dE = \Big[E f \Big]_1^2 - \int_{f_2}^{f_1} E\, df.$$

R. Considérons f comme fonction de E ; soit ΔE la portion du plan comprise entre deux lignes successives (f) et ($f + \Delta f$), la valeur de l'intégrale double dans ΔE est $f' \Delta E$ où f' est une valeur intermédiaire de f dans ΔE. Donc, en faisant tendre les ΔE vers 0, il vient

$$\iiint_A f(x, y)\, dx\, dy = \lim \Sigma f' \Delta E = \int_{E_1}^{E_2} f(x, y)\, dE .$$

1. *Coordonnées elliptiques*. Considérons les coniques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

où λ est un paramètre arbitraire. Par tout point du plan passent deux coniques de cette espèce, une ellipse et une hyperbole, car, pour chaque système x, y, cette équation a deux racines positives λ et μ comprenant c^2. Les quantités λ, μ sont les coordonnées elliptiques du point x, y. Montrer que l'on a

$$x = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}{c},$$

$$\frac{d(x, y)}{d(\lambda, \mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{\lambda\mu(\lambda - c^2)(c^2 - \mu)}}.$$

Etudier le mode de correspondance des aires x, y et λ, μ.

5. Déterminer denx fonctions P et Q de deux variables x et y de façon que l'intégrale curviligne

$$\int P(x + \alpha, y + \beta)\, dx + Q(x + \alpha, y + \beta)\, dy,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, soit indépendante des constantes α et β et ne dépende que du contour lui-même.

R. Transformant en intégrale double par la formule de Green, on remarque que $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ doit se réduire à une constante k. Il est facile d'en déduire les expressions de P et de Q.

§ 3. Aire des surfaces courbes.

21. Définition de l'aire d'une surface. Elément d'une surface. — Les surfaces que l'on rencontre dans les applications possèdent un plan tangent dont l'orientation varie d'une manière continue avec la position du point de contact. Nous ne voulons considérer que celles-là dans le chapitre actuel.

Soit S une portion d'une telle surface, limitée par un contour K et assez petite pour que l'angle de deux normales quelconques reste inférieur à 2 droits. Menons, ce qui est alors possible, un plan P qui ne soit normal à aucun des plans tangents de S.

Le plan P étant mené, la surface S se projette sur ce plan dans une aire D, entourée par un contour C qui est la projection de K. Les points de la surface se projettent séparément sur ceux de l'aire D, de sorte que la correspondance des points de la surface S et de l'aire D est uniforme.

Considérons un mode de partage de la surface S en éléments infiniment petits $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ et partageons, en même temps, l'aire D en éléments $\alpha_1, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ qui soient les projections des précédents. Désignons, en général, par Z l'angle du plan tangent à la surface avec le plan P, par Z_i la valeur de Z en un point arbitraire de σ_i. Il est naturel de considérer le quotient $\alpha_i : \cos Z_i$ comme une valeur approchée de l'aire de σ_i, car cette valeur serait exacte si σ_i était

une petite surface plane confondue avec son plane tangent. Nous disons donc, quitte à justifier cette définition dans un instant, que $\alpha_i : \cos Z_i$ est un *élément de surface* et que *l'aire* S *est la limite de la somme*

$$\Sigma \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}$$

de tous ces éléments quand ceux-ci tendent vers 0.

Pour justifier cette définition, il faut prouver 1°) que cette limite existe, 2°) qu'elle ne dépend que de la forme de la surface et non du choix du plan P.

L'existence de la limite apparaît immédiatement en ramenant cette expression à une intégrale double. A cet effet, rapportons la surface S à trois axes rectangulaires Ox, Oy et Oz en prenant le plan P comme plan des xy, et mettons l'équation de la surface sous la forme

$$z = f(x, y);$$

l'ordonnée z sera fonction continue de x et de y ainsi que ses deux dérivées partielles $p = f'_x$ et $q = f'_y$. L'angle Z du plan tangent avec le plan xy est le même que celui fait avec Oz par la normale à la surface menée dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz; on a $\cos Z = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, d'où

$$(1) \qquad S = \lim \Sigma \frac{\alpha_i}{\cos Z_i} = \int\int_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \int\int_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

La quantité qui se trouve sous le signe intégral dans la formule (1) s'appelle l'*élément de surface* dans le système de coordonnées x, y. On le désigne par $d\sigma$. On a donc

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Il faut encore montrer que l'aire ne dépend que de la forme de la surface. A cet effet, nous allons modifier notre première définition en nous appuyant sur le lemme suivant :

LEMME. — *L'aire d'une portion* S *de surface dont les points se projettent séparément sur un plan* P, *est égale au quotient de la projection de* S *sur ce plan par le cosinus de l'angle que fait avec* P *l'un des plans tangents à* S *convenablement choisi.*

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème de la moyenne à l'intégrale double qui représente S quand on prend le plan P comme

plan xy. Cette intégrale s'étend à la projection D de S sur ce plan : il vient ainsi, ζ étant une valeur moyenne de l'angle Z,

$$S = \iint_D \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \frac{D}{\cos \zeta}.$$

Nouvelle définition de l'aire d'une surface. — *L'aire d'une portion* S *de surface est la limite de la somme des projections de tous les éléments de* S *sur un de leurs plans tangents respectifs, quand on décompose* S *en parties qui décroissent indéfiniment dans tous les sens* [1].

Soit, en effet, σ_i un des éléments de la surface et α_i sa projection sur l'un P_i de ses plans tangents. Appliquons le lemme précédent, il viendra, ζ_i désignant l'angle du plan P_i avec un autre plan tangent (convenablement choisi) à ce même σ_i,

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i} \qquad \text{d'où} \qquad S = \Sigma \frac{\alpha_i}{\cos \zeta_i}.$$

Mais les angles ζ_i sont ceux de deux plans tangents à un même élément ; ils tendent uniformément vers zéro avec ces éléments et leurs cosinus vers l'unité. On peut négliger ces cosinus sans changer la limite de la somme précédente, et il vient $S = \lim \Sigma \alpha_i$.

Cette nouvelle définition met en évidence que l'aire ne dépend que de la forme de la surface.

22. Aire d'une surface en coordonnées curvilignes. Remarque sur le calcul de l'élément d'aire. — Considérons maintenant une surface donnée *en coordonnées curvilignes* ou par une représentation paramétrique :

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Posons

$$A = \frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \qquad B = \frac{d(z, x)}{d(u, v)}, \qquad C = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

[1] On peut encore modifier la définition précédente de manière à la rendre indépendante de la considération du plan tangent. La projection de chacun des éléments α_i sur un plan variable atteint son maximum β_i pour une certaine orientation de ce plan. D'ailleurs β_i ne peut surpasser σ_i en vertu du lemme, ni être moindre que α_i par définition. On peut donc poser

$$\sigma_i \geqq \beta_i \geqq \alpha_i.$$

Faisons la somme de toutes les inégalités semblables et passons à la limite : il vient

$$S \geqq \lim \Sigma \beta_i \geqq S.$$

Donc $S = \lim \Sigma \beta_i$. D'où la définition suivante :

L'aire d'une portion de surface est la limite de la somme des projections planes maxima des éléments de cette surface, quand on divise la surface en parties infiniment petites.

Supposons que ces trois déterminants fonctionnels soient fonctions continues de u, v et ne s'annulent simultanément en aucun point d'une aire Ω du plan uv. Si le point uv décrit l'aire Ω, le point xyz décrit une portion de surface S. En tout point de cette portion de surface, le plan tangent est déterminé, son orientation varie d'une manière continue avec la position du point de contact, et les cosinus directeurs de la normale sont donnés par les équations

$$\frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si la normale est dirigée dans le sens où elle fait un angle aigu avec OZ, le cosinus de cet angle sera positif et l'on aura

$$\cos Z = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Supposons d'abord que C ne s'annule pas dans l'aire Ω ; le plan tangent sera partout oblique au plan xy et l'aire de S sera donnée par l'intégrale étendue à l'aire D du plan xy sur laquelle se projette S,

$$S = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint_D \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}\,dx\,dy.$$

Transformons cette intégrale en une autre étendue à l'aire Ω du plan uv. Le déterminant de la transformation est C. Il vient donc

$$(2) \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv.$$

Si l'un des deux autres déterminants A, B ne s'annulait pas dans Ω, on pourrait raisonner de même sur les plans yz ou zx et l'on retrouverait la même formule. D'ailleurs, dans tous les cas, on peut partager l'aire Ω en plusieurs autres où l'un des trois déterminants ne s'annule pas. Donc *la formule* (**2**) *est générale et subsiste quelle que soit l'orientation du plan tangent.*

On transforme souvent la formule (**2**). Posons

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

On aura identiquement $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$. Donc

$$(2') \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Les paramètres E, F, G que nous venons d'introduire jouent un rôle important dans la théorie des surfaces. Ajoutons les carrés de dx, dy, dz ; il vient

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2.$$

Donc le carré d'un élément d'arc sur la surface est une forme homogène du second degré en du, dv, ayant $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ pour discriminant.

L'expression positive qui est sous le signe d'intégration double dans les formules (2) et (2′) s'appelle l'*élément d'aire* dans le système de coordonnées u, v. On le représente généralement par $d\sigma$. On a donc

$$(3) \qquad d\sigma = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}\, du\, dv = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\, du\, dv,$$

et les formules qui donnent les cosinus directeurs de la normale peuvent s'écrire maintenant, suivant le sens que l'on choisit,

$$(4) \qquad \frac{\cos \mathrm{X}}{\mathrm{A}} = \frac{\cos \mathrm{Y}}{\mathrm{B}} = \frac{\cos \mathrm{Z}}{\mathrm{C}} = \pm \frac{du\, dv}{d\sigma}.$$

§ 4. Formules usuelles de cubature et de quadrature. Applications.

23. Volumes en coordonnées rectangulaires et semi-polaires. — Un solide étant limité en tous sens par des surfaces planes ou courbes, les points de ce solide forment un domaine D. En axes rectangulaires, le volume du solide est donné par l'intégrale triple (n° 13)

$$(1) \qquad \mathrm{V} = \iiint_{\mathrm{D}} dx\, dy\, dz.$$

Les intégrations peuvent se faire de différentes manières :

1° *Sommation par tranches parallèles.* Soient a et A les valeurs extrêmes de x dans D. Désignons par S_x la section du solide par le plan x normal à Ox, ou encore le domaine du point yz dans cette section. On aura

$$\mathrm{V} = \int_a^{\mathrm{A}} dx \iint_{\mathrm{S}_x} dy\, dz.$$

Mais l'intégrale de $dy\, dz$ représente l'aire (fonction de x) de la section S_x, de sorte qu'il vient, $\varphi(x)$ désignant cette aire,

$$(2) \qquad \mathrm{V} = \int_a^{\mathrm{A}} \varphi(x)\, dx.$$

Donc, quand on connaît $\varphi(x)$, la détermination de V est ramenée à une simple quadrature. Quand on emploie la formule (**2**), la sommation des éléments se fait par tranches parallèles. En effet, l'élément $\varphi(x)\,dx$ de l'intégrale est la valeur principale du volume de la tranche du solide comprise entre les plans x et $x + dx$. C'est la formule (**2**) qu'on a appliquée dans la première partie du cours. On pourrait en écrire deux autres analogues relatives à y et à z.

2° *Sommation par filets prismatiques.* Effectuons maintenant dans la formule (**1**) une première intégration par rapport à z. Supposons que la surface du solide ne soit coupée qu'en deux points par une parallèle à Oz. Soient z_1 et z_2 les ordonnées fonctions de x, y de ces deux points. Désignons enfin par D_1 la portion du plan xy sur laquelle se projette le solide, portion limitée par le contour apparent de ce dernier. On aura

$$(3) \qquad V = \iint_{D_1} dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} dz = \iint_{D_1} (z_2 - z_1)\,dx\,dy.$$

La détermination de V est ramenée à une intégrale double. On dit que la sommation des éléments se fait par filets prismatiques, parce que l'élément $(z_2 - z_1)\,dx\,dy$ de cette intégrale est la valeur principale du volume d'un filet compris entre deux plans x et $x + dx$ perpendiculaires à Ox, et deux autres y et $y + dy$ perpendiculaires à Oy.

La formule (**3**) se simplifie lorsque le solide, ayant une base plane B dans le plan xy lui-même, est limité latéralement par une surface cylindrique parallèle à Oz et supérieurement par une surface $z = f(x, y)$.

La base B constitue alors le domaine D_1 ; on a $z_1 = 0$ et $z_2 = z$; d'où

$$(4) \qquad V = \iint_B z\,dx\,dy.$$

3° *Sommation par filets prismatiques en coordonnées semi-polaires.* La sommation par filets prismatiques se fait souvent au moyen des coordonnées semi-polaires z, r et θ. Cela revient à se servir des coordonnées polaires r et θ dans le plan xy. Transformons ainsi l'intégrale (**4**) : il faut y remplacer $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$, ce qui donne

$$(5) \qquad V = \iint_B z\,r\,dr\,d\theta.$$

L'intégration s'étend au domaine du point (r, θ) dans la base B.

24. Volumes en coordonnées polaires [1]. — En coordonnées polaires, un point M est défini par son *rayon vecteur* r ou sa distance à l'origine O, par sa *latitude* θ ou l'angle de OM avec OZ et par sa *longitude* φ ou l'angle du demi-plan ZOM avec ZOX. Quand M décrit tout l'espace, r varie de 0 à ∞, θ de 0 à π et φ de 0 à 2π.

Pour évaluer un volume en coordonnées polaires, on le décompose en éléments par trois familles de surfaces : des sphères de centre O définies par r, des cônes d'axe OZ définis par θ, et des plans passant par OZ définis par φ.

L'élément de volume compris entre les deux sphères r et $r + dr$, les deux cônes θ et $\theta + d\theta$, les deux plans φ et $\varphi + d\varphi$ peut être assimilé à un prisme infiniment petit, ayant pour arêtes dr, $r\,d\theta$ et $r \sin\theta\, d\varphi$, donc pour volume $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

Donc le volume V, qui est la somme de ces éléments, sera donné par l'intégrale triple :

$$V = \iiint r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi, \tag{6}$$

l'intégrale s'étendant au domaine de (r, θ, φ) dans le solide à evaluer.

C'est la formule générale pour l'évaluation des volumes en coordonnées polaires.

Supposons que le rayon vecteur ne coupe la surface du solide qu'en deux points. Soient r_1 et r_2 les valeurs, fonctions de (θ, φ), de r en ces deux points. Désignons par K le domaine (θ, φ) dans le solide. On peut effectuer la première intégration par rapport à r, ce qui donne

$$V = \frac{1}{3}\iint_K (r_2^3 - r_1^3) \sin\theta\; d\theta\, d\varphi, \tag{7}$$

En particulier, si l'origine est dans l'intérieur du solide et que le rayon vecteur ne coupe sa surface qu'en un seul point, il faut faire $r_1 = 0$ dans la formule précédente. Il vient, r se rapportant à la surface,

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta. \tag{8}$$

Dans ces deux dernières formules, l'élément de l'intégrale est le volume de l'élément conique du solide compris entre les deux cônes θ et $\theta + d\theta$ (de révolution autour de Oz) et les deux plans φ et $\varphi + d\varphi$ (passant par Oz).

Nous allons donner quelques applications de ces formules.

[1] La question est traitée rigoureusement au n° 36. Nous nous contentons ici d'une indication générale.

25. Exemple de sommation par filets prismatiques. — Soit à calculer le volume compris entre le plan xy, le paraboloïde elliptique

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2$$

et le cylindre vertical qui a pour base l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La base du solide est plane, c'est la portion B du plan intérieure à cette ellipse. La formule (4) donne

$$V = \int\int_B z\,dx\,dy = \alpha\int\int_B x^2\,dx\,dy + \beta\int\int_B y^2\,dx\,dy.$$

Les valeurs extrêmes de x dans B sont $-a$ et $+a$; les valeurs extrêmes de y pour un même x se tirent de l'équation de l'ellipse, elles sont

$$y_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y_1 = -y_2.$$

Il vient donc

$$\int\int_B x^2 dx dy = \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-y_2}^{+y_2} dy = 4\int_0^a x^2 y_2 dx = \frac{4\,b}{a}\int_0^a x^2 dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Par le changement de variables $x = a\sin\varphi$, cette expression devient

$$4\,a^3 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{a^3 b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\,d\varphi = a^3 b\,\frac{\pi}{4}\cdot$$

L'intégrale de $y^2 dx\,dy$ dans B sera $ab^3\,\frac{\pi}{4}$, car elle se déduit de la précédente par une simple permutation de lettres. Il vient donc

$$V = \frac{\pi}{4}\,ab\,(\alpha\,a^2 + \beta\,b^2).$$

26. Emploi des coordonnées semi-polaires. Problème de Viviani. — *On coupe un cylindre circulaire droit indéfini par une sphère dont le centre se trouve sur la surface du cylindre et dont le rayon a est égal au diamètre de la section droite du cylindre. Calculer le volume commun à la sphère et au cylindre.*

Prenons l'origine au centre de la sphère, l'axe des z parallèle au cylindre. La section droite du cylindre par le plan xy est un cercle passant par l'origine. Menons l'axe des x par son centre ; l'équation de ce cercle sera, en coordonnées polaires,

$$r = a\cos\theta$$

et celle de la sphère, en coordonnées rectangulaires,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

d'où, en coordonnées semi-polaires,

$$z = \pm\sqrt{a^2 - r^2}.$$

Cherchons d'abord le volume V commun à la demi-sphère située dans la région des z positifs et au demi-cylindre situé dans celle des y positifs. Ce volume a pour base B dans le plan xy la demi-section droite dans laquelle θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, pour un même θ, r varie dans cette base de 0 à $a\cos\theta$. Il vient donc, par la formule (5),

$$V = \iint_B zr\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr\sqrt{a^2 - r^2} = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta + \sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\frac{a^3}{3}.$$

Pour avoir le volume entier commun à la sphère et au cylindre, il faut quadrupler ce résultat, ce qui donne $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\right)a^3$. Le premier terme est égal au volume de la demi-sphère. Donc *l'excès du volume de la demi sphère située du côté des x positifs sur celui qu'en détache le cylindre est égal au neuvième du cube du diamètre*. C'est un exemple classique d'une cubature qui se fait exactement.

27. Quadrature des aires courbes. Aire du dôme de Viviani. — Les intégrales les plus employées pour évaluer l'aire d'une surface courbe S sont celles du n° 21 :

$$(9) \qquad S = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy,$$

étendues à la projection D de S sur le plan xy, et celle qu'on en déduit par l'introduction des coordonnées polaires r et θ dans le plan xy :

$$(10) \qquad S = \iint_D \frac{r\,dr\,d\theta}{\cos Z}.$$

C'est de celle-ci que nous allons nous servir pour évaluer l'aire du *dôme de Viviani*.

Les données étant les mêmes que dans l'exemple du n° 26 il s'agit de trouver l'aire de la portion de surface sphérique comprise dans le cylindre.

Conservons les mêmes axes que précédemment et considérons seulement la demi-sphère située dans la région des z positifs et le demi-cylindre situé dans celle des y positifs. Soit S la portion de l'aire de cette demi-sphère comprise dans ce demi-cylindre, sa projection sur le plan xy est l'aire B considérée dans le n° 26, de sorte que l'on a

$$S = \iint_B \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint_B \frac{r\,dr\,d\theta}{\cos Z}.$$

Ce cosinus s'obtient de suite, car on a $z = a\cos Z$, d'où

$$\cos Z = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}.$$

Portons cette valeur dans l'intégrale double ; les limites de r et de θ sont les mêmes que dans le n° 26, il vient donc

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\,d\theta = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) a^2.$$

Pour avoir la portion de la surface sphérique comprise dans le cylindre, il faut quadrupler ce résultat, ce qui donne $(2\pi - 4)\,a^2$. Le premier terme est égal à l'aire de la demi-sphère. Donc l'*excès de la surface de la demi-sphère située du côté des x positifs sur celle que le cylindre en détache, a pour valeur $4a^2$*. Donc cette aire est exactement quarrable. C'est le premier exemple qu'on ait trouvé d'une surface courbe exactement quarrable.

28. Quadrature des aires courbes en coordonnées curvilignes. — La formule générale que nous avons établie au n° 22

$$\text{(11)} \qquad S = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

est aussi d'un grand usage. Elle ramène, comme les précédentes, le calcul de l'aire S à une intégrale double. Mais il y a trois cas principaux dans lesquels cette quadrature se ramène immédiatement à une intégrale simple :

1° *Surfaces engendrées par le mouvement hélicoïdal d'une courbe.* On appelle mouvement hélicoïdal celui qui se compose d'une rotation et d'une translation dont les axes coïncident. Prenons l'axe du mouvement pour axe des x et soient $X = \varphi(u)$, $Y = \psi(u)$ les équations de la section de la surface par le plan xy. Lorsqu'elle aura tourné de l'angle v, sa translation sera av (a constant) ; le point (X, O, Y) sera venu en (x, y, z) où l'on a :

$$x = X + av, \qquad y = Y\cos v, \qquad z = Y\sin v,$$

ce qui donne une représentation de la surface en coordonnées curvilignes u, v. En accentuant les dérivées par rapport à v, on a

$$ds^2 = (X'^2 + Y'^2)\,du^2 + 2a\,X'\,du\,dv + (Y^2 + a^2)\,dv^2,$$

par suite,

$$EG - F^2 = Y^2(X'^2 + Y'^2) + a^2 Y'^2.$$

Cette expression ne dépendant que de u, l'intégration par rapport à v dans la formule (11) sera immédiate.

2° *Surfaces de révolution.* Si la translation est nulle dans le déplacement précédent, la surface est de révolution. Dans ce cas, $a = 0$, d'où

$$\sqrt{EG - F^2} = Y\sqrt{X'^2 + Y'^2}.$$

Par conséquent, l'aire engendrée par une révolution entière de la section génératrice sera, en appelant s l'arc de cette section,

$$S = \int Y\sqrt{X'^2 + Y'^2}\,du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi\int Y\,du\sqrt{X'^2 + Y'^2} = 2\pi\int Y\,ds.$$

C'est la formule obtenue dans la première partie du cours.

3° *Surfaces réglées.* Elles sont définies en coordonnées curvilignes u, v par trois équations :

$$x = a_1 + b_1 u, \qquad y = a_2 + b_2 u, \qquad z = a_3 + b_3 u$$

où les a, b dépendent de v seul. Désignons leurs dérivées par des accents, il vient

$$ds^2 = [(a_1' + b_1' u)^2 + \cdots]\,dv^2 + 2\,[a_1' b_1 + \cdots]\,du\,dv + [b_1^2 + \cdots]\,du^2$$

On aura donc, M, N, P dépendants de v seul,

$$EG - F^2 = M + 2\,Nu + Pu^2$$

L'élément d'aire ne contenant que la racine carrée de ce trinome, nous saurons l'intégrer par rapport à u (tome I, n° 202).

29. Aires limitées par des lignes d'égale déclivité. — Appelons lignes d'égale déclivité d'une surface, celles sur lesquelles Z est constant. Dans beaucoup de cas importants, *pour les surfaces du second degré* par exemple, on obtient immédiatement l'aire E de la projection sur le plan xy d'une portion S de surface limitée par des lignes d'égale déclivité. La détermination de l'aire S ne dépend plus alors que d'une intégrale simple.

En effet, appelons ΔE l'accroissement de E entre les projections de deux lignes successives (Z et (Z + ΔZ) ; l'accroissement correspondant de S sera $\Delta E : \cos(Z + \theta\Delta Z)$ en vertu du lemme du n° 21. Donc, si l'on considère d'abord Z comme fonction de E, on aura, en faisant tendre les ΔE vers 0,

$$S = \Sigma\Delta S = \Sigma\frac{\Delta E}{\cos(Z + \theta\Delta Z)} = \int\frac{dE}{\cos Z}.$$

Si l'on veut calculer l'aire S comprise entre deux lignes (Z_1) et (Z_2), on aura, en prenant Z comme variable,

$$S = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{dE}{dZ} \frac{dZ}{\cos Z}.$$

30. Aire de l'ellipsoïde. — Comme application de la méthode du n° précédent, cherchons l'aire de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c).$$

Il faut d'abord déterminer la projection de la ligne sur laquelle cos Z a une valeur constante u. Nous obtiendrons son équation en tirant de l'équation de l'ellipsoïde les valeurs de p et de q en fonction de x, y et en portant ces valeurs dans la relation

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{u^2}.$$

Cette équation se met facilement sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1 - \alpha^2 u^2}{1 - u^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1 - \beta^2 u^2}{1 - u^2}\right) = 1, \quad \text{en posant} \begin{cases} a^2 - c^2 = a^2 \alpha^2, \\ b^2 - c^2 = b^2 \beta^2. \end{cases}$$

Donc la projection cherchée est une ellipse dont on connaît les demi-axes et, par conséquent, l'aire E. On a

$$E = \pi ab \frac{1 - u^2}{\Delta\Delta'}, \qquad \text{en posant} \begin{cases} \Delta^2 = 1 - \alpha^2 u^2, \\ \Delta'^2 = 1 - \beta^2 u^2. \end{cases}$$

Comme u (ou cos Z) varie de 1 à 0 pour la nappe supérieure de l'ellipsoïde, l'aire totale de la surface sera

$$S = -2 \int_0^1 \frac{dE}{du} \frac{du}{u}.$$

Transformons d'abord l'intégrale indéfinie. On a

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi ab \frac{du}{u^2 \Delta\Delta'} - \pi ab \frac{du}{\Delta\Delta'};$$

d'autre part, en différentiant,

$$d\frac{\Delta\Delta'}{u} = -\frac{\alpha^2 \Delta'}{\Delta} du - \frac{\beta^2 \Delta}{\Delta'} du - \frac{\Delta\Delta'}{u^2} du = -\frac{\alpha^2 \Delta'}{\Delta} du - \frac{\Delta}{u^2 \Delta'} du$$
$$= -\frac{\alpha^2 \Delta'}{\Delta} du - \frac{du}{u^2 \Delta\Delta'} + \alpha^2 \frac{du}{\Delta\Delta'},$$

d'où, en substituant,

$$\frac{E\,du}{u^2} = \pi ab \left[-d\frac{\Delta\Delta'}{u} - \frac{\alpha^2 \Delta'}{\Delta} du - (1 - \alpha^2) \frac{du}{\Delta\Delta'} \right].$$

Par suite de cette relation, on a

$$\int \frac{d\mathrm{E}}{u} = \frac{\mathrm{E}}{u} + \int \frac{\mathrm{E}\,du}{u^2}$$
$$= \pi ab \left[\frac{1-u^2}{u\Delta\Delta'} - \frac{\Delta\Delta'}{u} - \alpha^2 \int \frac{\Delta'}{\Delta}\,du - (1-\alpha^2)\int \frac{du}{\Delta\Delta'} \right].$$

D'après cela, l'aire totale S de l'ellipsoïde sera

$$\frac{\mathrm{S}}{2\pi ab} = -\left[\frac{1-u^2-\Delta^2\Delta'^2}{u\Delta\Delta'} \right]_0^1 + \alpha^2 \int_0^1 \frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1 \frac{du}{\Delta\Delta'},$$

ou, en remplaçant dans le terme aux limites Δ et Δ' puis α et β par leurs valeurs,

$$\frac{\mathrm{S}}{2\pi ab} = \frac{c^2}{ab} + \alpha^2 \int_0^1 \frac{\Delta'}{\Delta}\,du + (1-\alpha^2)\int_0^1 \frac{du}{\Delta\Delta'}.$$

Ces intégrales se ramènent aux intégrales elliptiques de Legendre (*t*. I, n° 339) par la substitution $\alpha u = \sin\varphi$. L'expression de $\mathrm{S} : 2\pi ab$ devient ainsi

$$\frac{c^2}{ab} + \alpha \int_0^{\operatorname{arc}\sin\alpha} d\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \int_0^{\operatorname{arc}\sin\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

où l'on a posé $k = \beta : \alpha = \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) : \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$, quantité < 1 par hypothèse.

Exercices.

1. Aire de la portion de la surface conique $z^2 = 2xy$ comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

R. $$\mathrm{S} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{ab}{2}}\,(a+b)$$

2. Aire de la portion du paraboloïde $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ comprise dans la sphère $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = c^2$.

R. $$\mathrm{S} = 4\pi c\sqrt{ab}.$$

3. Aire du même paraboloïde, mais intérieure au cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

R. $$\mathrm{S} = \frac{2\pi ab}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

4. Aire du même paraboloïde à l'intérieur d'une courbe d'égale déclivité Z.

R. $$\mathrm{S} = \frac{2\pi ab}{3}\left(\frac{1}{\cos^3 \mathrm{Z}} - 1\right).$$

5. Volume commun au paraboloïde et au cylindre de l'exercice 3.

R. On décompose en filets prismatiques. Les intégrations sont faciles.

6. Volume compris entre la sphère de rayon a qui a son centre à l'origine, le plan XY et le cylindre $x^2(x^2+y^2) - a^2(x^2-y^2) = 0$.

R. On décompose en filets prismatiques par les coordonnées semi-polaires. On trouve

$$V = \frac{a}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2\right).$$

§ 5. Intégrales de surface. Volumes en coordonnées curvilignes.

31. Définition des intégrales de surface. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue de x, y, z, pour tous les points d'une portion S de surface. Décomposons S en éléments infiniment petits d'aires $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ et désignons par (ξ_i, η_i, ζ_i) un point arbitraire de l'élément σ_i. Formons la somme, étendue à tous ces éléments,

$$\Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \sigma_i.$$

Cette somme tend vers une limite déterminée que l'on représente par

$$\iint_S f(x, y, z)\, d\sigma$$

et que l'on appelle l'intégrale de $f(x, y, z)\, d\sigma$ *étendue à la surface* S.

Montrons, en effet, que cette expression se réduit à une intégrale double ordinaire.

Supposons d'abord que le plan tangent ne soit nulle part normal au plan xy. L'équation de S peut se mettre sous la forme

$$z = \varphi(x, y).$$

La portion S de surface se projette sur une aire D du plan xy dont les points correspondent uniformément à ceux de S. Menons la normale à S dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz et soit Z cet angle. Désignons par Z_i la valeur de Z au point ξ_i, η_i, ζ_i pris arbitrairement dans σ_i. Comme $\zeta_i = \varphi(\xi_i, \eta_i)$, on a, par définition même d'une intégrale double (n° 10),

$$\iint_D f\left[x, y, \varphi(x, y)\right] \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \lim \Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \frac{\alpha_i}{\cos Z_i}.$$

Portons notre attention sur cette limite de sommes.

On sait (n° 21) que σ_i est égal à $\alpha_i : \cos \zeta_i$ où ζ_i est la valeur de Z en un point convenable de σ_i. Comme les quotients $\cos Z_i : \cos \zeta_i$

tendent uniformément vers l'unité quand les éléments σ_i tendent vers O, on ne changera pas cette limite de sommes en y remplaçant $\cos Z_i$ par $\cos \zeta_i$, ce qui revient à mettre σ_i à la place de $\alpha_i : \cos Z_i$. Il vient donc, en écrivant z à la place de φ,

$$(1) \quad \iint_D f(x, y, z)\, \frac{dx\, dy}{\cos Z} = \lim \Sigma f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \sigma_i = \iint_S f(x, y, z)\, d\sigma.$$

Donc l'intégrale de surface revient à une intégrale double étendue au domaine D dans le plan xy.

Si le plan tangent n'était nulle part normal au plan yz ou au plan xz, l'intégrale de surface se réduirait de même à une intégrale double dans l'un ou l'autre de ces deux plans.

Comme, en tous cas, on peut partager S en morceaux de telle sorte que le plan tangent soit toujours oblique à l'un au moins des plans coordonnés dans toute l'étendue d'un même morceau, on peut aussi, dans tous les cas, exprimer l'intégrale de surface par une somme d'intégrales doubles.

Si la surface était donnée par une représentation paramétrique, les coordonnées x, y, z seraient fonctions de u, v dans une aire Ω, on pourrait transformer les intégrales précédentes en intégrales effectuées par rapport à u, v comme au n° 22 ; et il viendrait

$$(2) \quad \iint_S f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_\Omega f(x, y, z) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_\Omega f(x, y, z) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

32. Intégrale étendue à un côté déterminé d'une surface. — Soit S une portion de surface limitée par un contour déterminé qui en forme le bord. Nous supposons que cette surface a deux côtés distincts. Il faut entendre par là que, si l'on regarde S comme un lambeau de surface matérielle d'une épaisseur infiniment petite, mais impénétrable, un point mobile sur cette surface ne peut passer d'un côté à l'autre qu'en faisant le tour par le bord.

Ceci posé, supposons d'abord que le plan tangent à S ne soit jamais normal au plan xy, ou tout au moins ne lui devienne normal que sur le bord, et mettons l'équation de S sous la forme

$$z = \varphi(x, y).$$

Convenons que la normale ne pourra pas traverser la surface, alors

les deux sens de la normale correspondent aux deux côtés de la surface. Dans notre hypothèse, il y a sur la surface un *côté supérieur* (vers les z positifs) et un *côté inférieur* (vers les z négatifs), auxquels correspondent respectivement une *normale supérieure* et une *normale inférieure*.

Soient $R(x, y, z)$ une fonction continue en tout point de S, et D la projection de S sur le plan xy. Considérons l'intégrale de surface

$$\iint_S R \cos Z \, d\sigma,$$

où Z désigne l'angle de la normale avec Oz ; suivant que cet angle sera celui de la normale supérieure ou celui de la normale inférieure, l'intégrale revient à l'une ou à l'autre des deux intégrales doubles

$$\iint_D R\,dx\,dy, \qquad -\iint_D R\,dx\,dy.$$

Nous dirons que l'intégrale de surface s'étend, dans le premier cas, *au côté supérieur*, dans le second, *au côté inférieur* de la surface S. Nous conviendrons d'ailleurs de la représenter, dans les deux cas, par le même symbole

$$\iint_S R\,dx\,dy,$$

sous la condition de faire connaître le côté auquel s'étend cette intégrale. Cette connaissance, en effet, suffit pour déterminer celle des deux intégrales doubles étendues à l'aire D du plan xy que représente l'intégrale sur S.

Nous pouvons maintenant faire disparaître les restrictions que nous avions imposées au plan tangent, et considérer une surface de forme quelconque, fermée ou non, pourvu qu'elle ait toujours deux côtés distincts. En effet, il est possible de partager la surface en morceaux, de telle sorte que le plan tangent ne soit normal au plan xy que sur le bord des morceaux ou dans un certain nombre de morceaux tout entiers [1]. Dans ces derniers, l'intégrale de surface est nulle avec

[1] Il est à remarquer toutefois que, dans la décomposition précédente, les lignes de partage de S sont celles sur lesquelles le plan tangent est normal au plan xy, ou bien celles qui limitent les portions cylindriques de S normales à ce plan. Pour qu'on puisse appliquer sans difficulté les théories exposées précédemment, il faut donc admettre que ces lignes sont formées de tronçons consécutifs sur lesquels les variations de x et y ne changent pas de sens. Les théorèmes pourraient évidemment subsister sous des conditions plus générales encore, mais nous ne ferons pas cette généralisation qui présente actuellement peu d'intérêt. Nous admettrons, une fois pour toutes, que la condition précédente est réalisée et nous n'y reviendrons plus dans les théorèmes suivants.

cos Z ; dans les autres, elle est définie par ce qui précède ; enfin l'intégrale étendue à un côté de la surface entière est la somme des intégrales étendues aux côtés correspondants de chaque morceau.

On définira d'une manière analogue les intégrales

$$\iint_S P(x, y, z)\, dydz, \qquad \iint_S Q(x, y, z)\, dxdz.$$

En faisant la somme de ces intégrales, on obtient l'*expression la plus générale d'une intégrale de surface*, qui est la suivante :

$$\iint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy)\,.$$

Cette intégrale *étendue à un côté déterminé de la surface* S revient, par définition, à

$$\iint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z)\, d\sigma,$$

où cos X, cos Y, cos Z sont les cosinus directeurs de la normale à ce côté de la surface.

33. Transformation des intégrales de surface. — Considérons une intégrale, étendue à un côté déterminé d'une surface S,

$$\iint_S P\,(x, y, z)\, dx\, dy\ ;$$

et supposons que les formules de transformation :

$$x = \varphi_1\,(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2\,(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \varphi_3\,(\xi, \eta, \zeta),$$

fassent correspondre uniformément les points d'une surface S dans l'espace xyz et ceux d'une autre surface Σ dans l'espace $\xi\eta\zeta$. *Le problème de la transformation consiste à remplacer l'intégrale étendue à* S *par une autre étendue à* Σ.

Pour le résoudre, considérons les coordonnées x, y, z et ξ, η, ζ des points correspondants sur les surfaces S et Σ comme des fonctions de deux variables indépendantes u et v qui décrivent une aire Ω dans le plan uv.

Pour la surface S, les cosinus directeurs de la normale vérifient les formules (4) du n° (22), savoir

$$\frac{\cos X}{A} = \frac{\cos Y}{B} = \frac{\cos Z}{C} = \pm\,\frac{du\,dv}{d\sigma}\,; \qquad A = \frac{d(y, z)}{d(u, v)}\,, \cdots$$

Marquons avec l'indice 1 les quantités analogues pour Σ ; on aura

$$\frac{\cos X_1}{A_1} = \frac{\cos Y_1}{B_1} = \frac{\cos Z_1}{C_1} = \pm\,\frac{du\,dv}{d\sigma_1}\,; \qquad A_1 = \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)}\,, \cdots$$

Mais la formule (1) du n° (15) peut se mettre sous la forme

$$C = \frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} A_1 + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} B_1 + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} C_1,$$

ce qui, multiplié par $du\, dv$, devient, à cause des systèmes d'égalités qui précèdent,

$$\cos Z\, d\sigma = \pm \left[\frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} \cos X_1 + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} \cos Y_1 + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} \cos Z_1 \right] d\sigma_1.$$

D'ailleurs on peut prendre le signe + à condition de mener la normale à Σ du côté convenable. Multiplions encore les deux membres de l'équation précédente par P et intégrons par rapport à u, v dans le domaine Ω. Le résultat pourra s'écrire comme il suit :

$$(3) \quad \int\int_S P\, dx\, dy = \int\int_\Sigma P \left[\frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)} d\eta\, d\zeta + \frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)} d\zeta\, d\xi + \frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta \right].$$

C'est la formule de transformation ; l'intégration doit se faire sur Σ du côté convenable (celui de la normale qu'on vient de considérer).

Par une permutation circulaire simultanée des lettres P, Q, R et des lettres x, y, z, on obtiendra deux autres formules analogues qu'il est inutile d'écrire.

Il reste à donner une règle pour fixer le côté d'intégration sur la surface Σ.

Définissons d'abord ce que nous appellerons *côtés correspondants* sur les surfaces S et Σ. Imaginons un point infiniment voisin de S d'un côté de cette surface, son correspondant sera infiniment voisin de Σ d'un certain côté de cette seconde surface. Ce sont ces deux côtés qu'il est naturel de considérer comme correspondants.

On peut alors énoncer la règle suivante, dont nous donnerons la démonstration au n° 36 :

Les deux intégrales de la formule (**3**) *sont étendues aux côtés correspondants des deux surfaces si le jacobien* J *de* x, y, z *par rapport à* ξ, η, ζ *est positif, aux côtés inverses si* J *est négatif.*

34. Formule de Green pour l'espace. — Soient S une surface fermée et V le volume ou la portion de l'espace qu'elle renferme. Il y aura sur cette surface un côté intérieur et un côté extérieur et, par conséquent, une normale intérieure et une normale extérieure. Soit R (x, y, z) une fonction continue ainsi que sa dérivée $\frac{\partial R}{\partial z}$ dans toute l'étendue du volume V et de la surface S. Nous allons établir, pour commencer, la formule suivante, qui est un cas particulier de celle de Green :

$$(4) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int\int_S R\, dx\, dy.$$

Elle ramène le calcul d'une intégrale triple dans un volume V à celui d'une intégrale double étendue *au côté extérieur* de la surface qui limite ce volume.

Supposons d'abord que la surface S ne soit rencontrée qu'en deux points par une parallèle à l'axe des z ; alors la surface S se partage en deux autres S_1 et S_2, l'une inférieure limitant le volume par au dessous, l'autre supérieure limitant le volume par au dessus, et dont nous désignerons respectivement les ordonnées par z_1 et z_2 ($z_1 < z_2$). Ces deux ordonnées seront des fonctions continues de x et y à l'intérieur du domaine D limité par le contour apparent de S sur le plan xy.

Si l'on effectue une première intégration par rapport à z, il viendra donc

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_D R\,(x, y, z_2)\, dx\, dy - \int\!\!\int_D R\,(x, y, z_1)\, dx\, dy.$$

Considérons ces deux intégrales doubles avec leur signe. Elles reviennent à des intégrales prises respectivement sur les surfaces S_2 et S_1, mais la première s'étend au côté supérieur et la seconde au côté inférieur. Dans les deux cas, c'est le côté extérieur de la surface S, de sorte que les deux intégrales prises ensemble s'étendent au côté extérieur tout entier de S et l'on trouve la formule (**4**).

La formule (**4**) subsiste, si le volume V est limité latéralement par des portions de cylindres parallèles à l'axe des z, séparant l'une de l'autre deux surfaces S_1 et S_2 analogues aux précédentes. En effet, les portions de surfaces parallèles à Oz ne donnent que des intégrales nulles et il n'y a pas lieu d'en tenir compte.

Enfin la formule (**4**) subsiste, quelle que soit la surface qui limite le volume V, car on peut toujours découper le volume V en morceaux limités par des surfaces satisfaisant aux conditions supposées jusqu'ici. On pourra appliquer la formule (**4**) à chaque morceau et, en additionnant les résultats, on trouvera la formule sous sa forme générale. En effet, les intégrales étrangères relatives aux surfaces qui séparent les morceaux, sont étendues successivement aux deux côtés de ces surfaces, car chaque côté est extérieur relativement à l'un des deux morceaux limitrophes. Donc ces intégrales se détruisent.

On établit comme la formule (**4**) les deux formules analogues :

$$\int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_S P\, dy\, dz, \qquad \int\!\!\int\!\!\int_V \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int\!\!\int_S Q\, dz\, dx$$

et, en les ajoutant, on trouve la *formule de Green*

$$(5)\quad \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

les intégrales de surfaces étant toujours extérieures.

35. Expression des volumes par des intégrales de surface. — Si l'on fait $P = x$, $Q = R = 0$ dans la formule précédente, on trouve la première des deux formules suivantes, les autres s'obtenant par analogie :

$$(6)\qquad V = \iint_S x\,dy\,dz = \iint_S y\,dz\,dx = \iint_S z\,dx\,dy\,;$$

elles expriment un volume par une intégrale étendue au côté extérieur de sa surface frontière. En les ajoutant, il vient

$$V = \frac{1}{3}\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

D'où, par l'introduction des cosinus directeurs de la normale extérieure,

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos X + y\cos Y + z\cos Z)\,d\sigma.$$

Ce résultat est facile à transformer. Si l'on désigne par (r, n) l'angle de la normale *extérieure* avec le rayon vecteur r issu de l'origine, on a

$$x\cos X + y\cos Y + z\cos Z = r\cos(r, n).$$

D'où

$$(7)\qquad V = \frac{1}{3}\iint_S r\cos(r, n)\,d\sigma$$

36. Volumes en coordonnées curvilignes. Determination de l'élément de volume. — Reprenons les formules de transformation du n° 33

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

et supposons qu'elles fassent correspondre uniformément les points d'un volume V limité par une surface S dans l'espace $x\,y\,z$ et ceux d'un volume Ω limité par une surface Σ dans l'espace $\xi\,\eta\,\zeta$. On aura, en appliquant à l'une des intégrales (**6**) du n° précédent la formule de transformation (**3**) du n° 33,

$$V = \iint_S z\,dx\,dy = \iint_\Sigma z\left[\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}\,d\eta\,d\zeta + \frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}\,d\zeta\,d\xi + \frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta\right].$$

Nous savons que l'intégrale étendue à S l'est au côté extérieur, mais nous ignorons encore sur quel côté est prise l'intégrale étendue à Σ. Nous allons le reconnaitre en observant que V doit être positif.

Transformons par la formule de Green l'intégrale étendue à Σ dans une intégrale triple étendue à Ω. Il faut poser :

$$P = z\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}, \qquad Q = z\,\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}, \qquad R = z\,\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)},$$

auquel cas, l'on a, en désigant par J le jacobien de la transformation,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} + \cdots = \frac{d(x,y,z)}{d(\xi,\eta,\zeta)} = J,$$

car on vérifie immédiatement que les dérivées secondes se détruisent. La transformation de Green donne donc, en choisissant le signe + ou — suivant que l'intégrale a été étendue au côté extérieur ou au côté intérieur de Σ,

$$(\mathbf{8}) \qquad V = \pm \iiint_\Omega J\,d\xi d\eta d\zeta = \iiint_\Omega |J|\,d\xi d\eta d\zeta.$$

C'est la formule générale pour le calcul des volumes (1).

Si J est > 0, il faut prendre le signe + dans la formule précédente et l'intégrale étendue à Σ l'est au côté extérieur ; de même, si $J < 0$, cette intégrale s'étend au côté intérieur. Les côtés extérieurs sont considérés comme correspondants par définition. Donc les intégrales sur S et sur Σ sont étendues aux côtés correspondants ou aux côtés inverses de ces deux surfaces suivant que J est positif ou négatif.

La règle qui termine le n° 33 est ainsi établie pour deux surfaces fermées. Elle subsiste pour deux portions de surfaces quelconques, car on peut les considérer comme des portions de surfaces fermées.

L'expression $|J|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ sous le signe d'intégration dans la formule (**8**) s'appelle l'*élément de volume* dans le système de coordonnées ξ, η, ζ. On peut la transformer.

L'élément d'arc $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ est une forme homogène du second degré en $d\xi\ d\eta\ d\zeta$, qu'on peut écrire

$$ds^2 = H_1 d\xi^2 + H_2 d\eta^2 + H_3 d\zeta^2 + 2F_1 d\eta d\zeta + 2F_2 d\zeta d\xi + 2F_3 d\xi d\eta,$$

en posant, en abrégé,

$$H_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2, \quad H_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \cdots, \quad H_3 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \cdots,$$

$$F_1 = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad F_2 = \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \cdots, \quad F_3 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \cdots$$

(1) Cette démonstration postule l'existence des dérivées secondes de x, y, z. On fera disparaître cette restriction comme dans le cas de deux variables (n°17). D'autre part, les surfaces S et Σ ont été soumises à des restrictions. Pour étendre la formule (**8**) au cas d'un volume V limité par une surface quelconque, il suffit de l'appliquer à un volume V′ satisfaisant aux conditions de la démonstration et de faire tendre V′ vers V. La formule subsistera à la limite, pourvu seulement que V soit déterminé.

Son discriminant M sera

$$M = \begin{vmatrix} H_1 & F_3 & F_2 \\ F_3 & H_2 & F_1 \\ F_2 & F_1 & H_3 \end{vmatrix}$$

Or il suffit d'élever J au carré, par la règle habituelle de formation du carré d'un déterminant, pour obtenir $J^2 = M$.

L'élément de volume est donc égal aussi à $\sqrt{M}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

On dit que le système des coordonnées ξ, η, ζ est *orthogonal* si $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. Dans ce cas, on a

$$ds^2 = H_1 d\xi^2 + H_2 d\eta^2 + H_3 d\zeta^2$$

et l'élément de volume devient $\sqrt{H_1 H_2 H_3}\, d\xi d\eta d\zeta$.

Le système des *coordonnées polaires dans l'espace* est orthogonal, car, des relations

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta,$$

on tire directement

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

L'*élément de volume en coordonnées polaires* est donc $r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$. Ce résultat est facile à obtenir par des considérations géométriques directes (nº 24)

37. Transformation des intégrales triples. — Soit à transformer une intégrale triple

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

en une autre étendue à un volume Ω dans l'espace ξ, η, ζ. Les formules de transformation

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta)$$

sont supposées établir une correspondance uniforme entre les points des deux volumes V et Ω. On aura

$$(9) \quad \iiint_V f(x, y, z)\, dx dy dz = \iiint_\Omega f(x, y, z) \left| \frac{d(x, y, z)}{d(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

La démonstration est la généralisation immédiate de celle qui a été donnée dans le cas de deux variables (nº 18).

38. Intégrales curvilignes dans l'espace. Formule de Stokes. — La notion des intégrales curvilignes s'étend d'elle-même à l'espace. Décrivons un arc de courbe L sur lequel x varie en croissant ou en décrois-

sant constamment de a à b. Les deux autres coordonnées y et z seront fonctions continues de x entre a et b, de sorte que toute fonction continue P (x, y, z) des trois variables est une fonction composée de x le long de la courbe L. Nous poserons, par définition, le sens du parcours sur L et l'ordre des limites a et b se correspondant,

$$\int_{L} P\,dx = \int_{a}^{b} P\,dx.$$

Cette première définition de l'intégrale curviligne s'étend immédiatement à toute ligne L composée de plusieurs segments consécutifs sur chacun desquels x varie dans le même sens ou reste constant (l'intégrale sur le segment étant nulle dans ce dernier cas). Enfin, faisant la somme de trois expressions définies d'une manière analogue, on trouve

$$\int_{L} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz),$$

ce qui est le symbole général d'une intégrale curviligne sur la ligne L.

Passons maintenant à la formule de Stokes, qui a pour objet de ramener une intégrale de surface à une intégrale curviligne effectuée sur le contour qui limite la surface.

Soient S une portion de surface limitée par une ligne L et P (x, y, z) une fonction continue de x, y, z sur cette surface. Nous commencerons par établir la formule suivante :

$$(\mathbf{10}) \qquad \iint_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy - \frac{\partial P}{\partial z}\,dx\,dz \right) = \int_{L} P\,dx,$$

qui est un cas particulier de celle de Stokes.

Supposons d'abord que le plan tangent soit oblique au plan xy dans toute l'étendue de S, sauf peut-être sur le bord. La surface S aura un *côté supérieur* et un *côté inférieur* ; elle se projettera sur une aire D du plan xy, bornée aussi par un contour simple C qui sera la projection de L ; enfin l'équation de la surface pourra se mettre sous la forme

$$z = \varphi(x, y),$$

où φ est une fonction continue admettant des dérivées partielles p et q.

Pour fixer les idées, admettons que l'intégrale de surface de la formule (**10**) s'étende au côté supérieur de S. Soient cos X, cos Y, cos Z les cosinus directeurs de la *normale supérieure* (cos Z > 0) ; on aura (n° 32)

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\,dx dy - \frac{\partial P}{\partial z}\,dx dz \right) = \iint_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos Z - \frac{\partial P}{\partial z} \cos Y \right) d\sigma.$$

Mais les cosinus sont proportionnels à $-p$, $-q$ et 1, de sorte que

le quotient cos Y : cos Z est égal à $-q$. Il en résulte, en désignant encore par $P_1(x, y)$ ce que devient $P(x, y, z)$ quand on remplace z par $\varphi(x, y)$ que l'intégrale précédente devient successivement

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \cos Z\, d\sigma = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) dxdy = \iint_D \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dxdy.$$

Donc l'intégrale de surface est réduite à une intégrale double étendue à l'aire D du plan xy. Par la formule de Green (n° 12), celle-ci peut se transformer dans une intégrale curviligne étendue au contour C de l'aire D dans le sens direct (sens de la rotation de Ox vers Oy). Il vient

$$\iint_D \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dxdy = \int_C P_1 dx = \int_L P dx,$$

car les deux intégrales curvilignes sur C et sur L ont la même signification, pourvu que le parcours sur L se fasse aussi dans le sens de la rotation de Ox vers Oy. Donc l'intégrale sur L est égale à l'intégrale de surface

La formule (**10**) est ainsi établie dans un cas particulier : l'intégrale de surface s'étend au côté supérieur et l'intégration curviligne se fait en tournant dans le sens de la rotation de Ox vers Oy. Si l'intégrale de surface s'étendait au côté inférieur, la formule subsisterait en renversant le sens de l'intégration curviligne.

Mais on peut comprendre les deux cas dans une seule règle.

Imaginons qu'un observateur placé du côté des z positifs et marchant sur le plan xy, décrive un cercle autour de l'axe Oz en tournant dans le sens de Ox vers Oy ; l'intérieur sera soit à sa droite soit à sa gauche. Nous dirons, d'une manière générale, qu'un observateur qui marche sur un côté déterminé d'une surface et parcourt un contour fermé tracé sur ce même côté, décrit le contour *dans le sens direct*, si l'intérieur se trouve par rapport à lui du même côté (droit ou gauche) que le cercle dans le cas de tout à l'heure. D'après cette définition, le sens direct change pour un même contour suivant le côté de la surface où il est tracé. La distinction des deux cas disparaît pour la formule (**10**) en énonçant la règle suivante : *dans la formule* (**10**), *l'intégrale curviligne est effectuée dans le sens direct relativement au côté considéré de la surface.*

Pour faire disparaitre les restrictions imposées au plan tangent et étendre la formule (**10**) à une surface S de forme quelconque, mais ayant deux côtés distincts, il suffit de partager la surface en morceaux et de raisonner comme dans le cas de la formule de Green. On aura seulement à considérer des lignes de partage tracées sur la surface au lieu de surfaces de partage. Nous ne recommençerons pas cette démonstration.

Arrivons maintenant à la formule générale de Stokes.

Soient P, Q, R trois fonctions continues de x, y, z ainsi que leurs

dérivées. On obtiendra deux autres formules analogues à (**10**) par une permutation circulaire simultanée des lettres P, Q, R et x, y, z. En ajoutant les trois formules, on trouve

$$(\mathbf{11})\quad \left\{ \begin{aligned} &\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dz\,dx \\ &\qquad = \int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \end{aligned} \right.$$

C'est la formule générale de Stokes, l'intégrale curiligne doit être effectuée *dans le sens direct* relativement au côté considéré de la surface. Si les axes sont donnés comme d'habitude, les rotations de Ox vers Oy, de Oy vers Oz et de Oz vers Ox, se font dans le sens de celle des aiguilles d'une montre pour un observateur debout sur le plan de la rotation du côté du troisième axe. Dans ce cas, le sens direct est celui qui laisse l'intérieur de l'aire à droite. C'est l'inverse de ce qui avait lieu dans le plan, et cela provient de ce que les axes Ox, Oy ne sont pas choisis d'habitude avec le même sens de rotation dans l'espace que dans le plan.

Exercices.

1. *Intégrale de Gauss.* Soient S une surface fermée, M un point fixe, r le rayon vecteur issu de M, (r, n) l'angle de r avec la normale extérieure à la surface. Selon que M est à l'intérieur de la surface, en dehors d'elle ou sur la surface, on a

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)\,d\sigma}{r^2} = 4\pi, \quad 0, \quad \text{ou } 2\pi.$$

R. On remarque que l'élément de cette intégrale représente l'angle solide sous lequel l'élément $d\sigma$ est vu de M.

2. *Coordonnées elliptiques.* Considérons les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}-1=0.$$

Pour chaque système x, y, z, cette équation a trois racines λ_1, λ_2, λ_3, $(c<\lambda_1<b<\lambda_2<a<\lambda_3)$ que l'on appelle les *coordonnées elliptiques* du point x, y, z. Par chaque point passent donc trois surfaces, un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes et un hyperboloïde à une nappe. On a

$$x^2=\frac{(\lambda_3-a)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)}{(a-b)(a-c)}, \qquad \frac{2\,dx}{x}=\frac{d\lambda_1}{\lambda_1-a}+\frac{d\lambda_2}{\lambda_2-a}+\frac{d\lambda_3}{\lambda_3-a},$$

et d'autres équations analogues en permutant circulairement xyz et abc. Montrer que le système est l'orthogonal et calculer l'élément de volume $\sqrt{H_1 H_2 H_3}\,d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$.

R. On trouve, H_2 et H_3 s'obtenant par permutation circulaire,

$$4H_1=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-a)(\lambda_1-b)(\lambda_1-c)}.$$

CHAPITRE II.

Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre. Intégration des différentielles totales exactes.

§ 1. Intégrales généralisées élémentaires.

39. Intégrales proprement dites, intégrales généralisées. — Dans le chapitre précédent, on n'a considéré que des fonctions et des domaines d'intégration limités. Si la fonction ou le domaine d'intégration devient infini, il faut un passage à la limite de plus pour définir l'intégrale. Nous donnerons aux intégrales qui comportent ce nouveau passage à la limite le nom d'*intégrales généralisées*, par opposition aux précédentes que nous appellerons des *intégrales proprement dites*. Les principes de ces nouvelles définitions ont déjà été brièvement indiqués dans le premier volume (n° 232).

Nous commencerons par exposer un théorème qui est souvent utile dans les recherches relatives à ces intégrales.

40. Deuxième théorème de la moyenne. — I. *Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions bornées et intégrables* (1) *dans l'intervalle (a, b). Si, pour $x > a$ et $< b$, $\varphi(x)$ est : 1° toujours positive, 2° non décroissante, 3° $\leq$ B, on aura*

$$(1)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \mathrm{B}\int_\xi^b f(x)\, dx \qquad (a \leq \xi \leq b).$$

Décomposons l'intervalle (a, b) en éléments infiniment petits par les points $x_1 = a, x_2, x_3, \dots x_{n+1} = b$. Désignons, en général, par δ_i l'amplitude et par ξ_i un point intermédiaire de l'élément (x_i, x_{i+1}). Le premier membre de (1) est la limite de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx,$$

(1) Le théorème et la démonstration que nous en donnons ici supposent seulement f *sommable* au sens de Lebesgue (et non borné). La fonction φ est intégrable au sens de Riemann en vertu de la condition 2°.

car la différence de ces deux expressions, à savoir

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi(x) - \varphi(\xi_i)] f(x)\, dx,$$

tend vers zéro. En effet, soient Δ_i l'oscillation de φ dans l'intérieur de δ_i et μ la plus grande des intégrales de $|f|$ dans les divers intervalles δ_i, cette différence est moindre en valeur absolue que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|\, dx < \mu \Sigma \Delta_i \leq \mu B,$$

et elle tend vers zéro avec μ (qui tend évidemment vers 0 avec les δ_i). Donc, en écrivant la même somme autrement, le premier membre de (1) est aussi la limite de

$$\sum_{1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{1}^{n} \varphi(\xi_i) \left[\int_{x_i}^{b} - \int_{x_{i+1}}^{b} f\, dx\right]$$

$$= \varphi(\xi_1) \int_{a}^{b} f\, dx + \sum_{2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^{b} f\, dx.$$

On ne change pas non plus cette limite par l'addition d'un terme qui tend vers 0, de sorte que le premier membre de (1) est encore la limite de l'expression

$$\varphi(\xi_1) \int_{a}^{b} f\, dx + \sum_{2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^{b} f\, dx + [B - \varphi(\xi_n)] \int_{x_n}^{b} f\, dx.$$

Les coefficients des trois intégrales de $f\,dx$ qui sont écrites dans cette expression sont respectivement positifs en vertu des trois hypothèses du théorème. Donc, en désignant par μ une moyenne entre ces intégrales ou, ce qui revient au même, entre les valeurs de $\int_{x}^{b} f\, dx$ dans l'intervalle (a, b) de x, l'expression précédente est de la forme

$$\mu\, [\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1) + \cdots + B - \varphi(\xi_n)] = \mu\, B.$$

Sa limite, ou le premier membre de (1), est donc aussi de la forme μB. D'ailleurs la fonction continue $\int_{x}^{b} f\, dx$ atteint la valeur intermédiaire μ pour une valeur au moins ξ de x dans l'intervalle (a, b), ce qui établit l'équation (1).

II. *Plus généralement, quel que soit le signe de $\varphi(x)$, si, pour $x > a$ et $< b$, cette fonction est : 1° $\geqslant$ A et $\leqslant$ B, 2° toujours non croissante ou toujours non décroissante, on aura*

$$(2) \qquad \int_{a}^{b} \varphi(x)\, f(x)\, dx = A \int_{a}^{\xi} f\, dx + B \int_{\xi}^{b} f\, dx, \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

En effet, si $\varphi(x)$ croît, on a, par le théorème I ($\varphi - A$ étant positif),

$$\int_a^b (\varphi - A)\, f\, dx = (B - A) \int_\xi^b f\, dx,$$

ce qui revient à la formule (2). Si, au contraire, φ décroît, on changera dans la formule (2) le signe de φ, donc ceux de A et de B ce qui revient à changer les signes des deux membres et, comme $-\varphi$ croît, on sera ramené au cas précédent.

Le théorème II donne lieu à deux formules particulières, souvent employées :

III. *On aura, en particulier, sous les mêmes conditions que* II,

$$(3) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f\, dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f\, dx.$$

En effet, on peut faire, dans la formule (2), $A = \varphi(a+0)$ et $B = \varphi(b-0)$ en désignant par là les limites de φ quand x tend vers a en décroissant ou vers b en croissant, limites toujours existantes car, dans les deux cas, la variation de φ ne change pas de sens.

IV. *Si la variation de* $\varphi(x)$ *ne change pas de sens dans l'intervalle* (a, b), *on aura*

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx = \varphi(a) \int_a^\xi f\, dx + \varphi(b) \int_\xi^b f\, dx.$$

En effet $\varphi(x)$ reste alors compris entre $\varphi(a) = A$ et $\varphi(b) = B$.

41. Définition des intégrales à limites infinies. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable au sens élémentaire, c'est-à-dire n'ayant que des points de discontinuité isolés dans l'intervalle (a, x') quelque grand que soit x' ; on pose, par définition,

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\, dx.$$

Si cette limite est finie et déterminée, l'intégrale *existe* ou est *convergente*. Dans le cas contraire, l'intégrale *n'existe pas* ou est *divergente*. Ceci peut avoir lieu de plusieurs manières. Si la limite est infinie positive ou négative, l'intégrale est *infinie positive* ou *négative*. S'il n'y a pas de limite, l'intégrale est *indéterminée*, mais elle n'est pas nécessairement dépourvue de toute signification, car l'indétermination peut être incomplète. Ainsi les plus grande et plus petite limites du second membre de l'équation sont les *limites d'indétermination* de l'intégrale.

Si l'on sait effectuer l'intégration indéfinie de $f(x)$, la connaissance d'une fonction primitive $F(x)$ permettra de reconnaître immédiatement si l'intégrale existe et d'en calculer la valeur. Il faudra, pour que l'intégrale existe, que $F(x)$ ait une limite finie $F(\infty)$ pour $x = \infty$ et l'intégrale aura pour valeur $F(\infty) - F(a)$.

Mais, en général, on ne connaît pas de fonction primitive et il faut un examen plus minutieux.

D'après les principes de la théorie des limites, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale à limite infinie *converge*, est que la différence des deux intégrales prises dans les intervalles (a, x') et (a, x'') soit infiniment petite, x' et x'' étant des infiniment grands indépendants. Cette différence se réduit à l'intégrale, prise entre deux limites qui augmentent indéfiniment,

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\, dx,$$

que l'on appelle une *intégrale singulière*. Donc, *pour que l'intégrale à limite infinie existe, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale singulière correspondante ait pour limite* 0.

La condition se simplifie quand $f(x)$ ne change pas de signe, car dans ce cas, l'intégrale entre a et x' varie toujours dans le même sens quand x' augmente. L'intégrale entre a et l'infini sera donc nécessairement convergente ou infinie.

Une intégrale est *absolument convergente* quand elle converge après qu'on y a remplacé $f(x)$ par sa valeur absolue ; et alors elle est convergente, car la valeur absolue de l'intégrale singulière ne diminue certainement pas quand on rend tous ses éléments positifs, et si elle tend vers 0 après ce changement, elle tendait déjà vers 0 avant.

On considère aussi des intégrales dont la limite inférieure est infinie. En supposant $f(x)$ toujours finie et intégrable dans l'intervalle (x', b), elles se définissent par la formule analogue à la précédente

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^{b} f(x)\, dx,$$

Elles donnent lieu aux mêmes considérations que les intégrales précédentes et s'y ramènent d'ailleurs en changeant x en $-x$.

Enfin, si les deux limites sont infinies, on pose (le choix de a étant évidemment indifférent).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx,$$

ce qui ramène aux deux cas précédents.

42. Règles de convergence absolue. (Limites infinies). — Nous nous bornerons à la seule intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$, car les règles relatives aux autres s'obtiennent par analogie. Nous remarquerons d'abord que cette intégrale sera convergente ou non, absolument convergente ou non, en même temps que $\int_p^\infty f(x)\,dx$ où p est un nombre aussi grand qu'on veut, car elle n'en diffère que par une intégrale proprement dite. C'est pourquoi, la limite inférieure de l'intégrale étant indifférente dans les règles suivantes (sous la seule condition que $f(x)$ soit intégrable), nous nous dispenserons de l'écrire.

I. *Supposons qu'on ait* $|f(x)| \leq |\varphi(x)|$ *à partir d'une certaine valeur de* x, *et formons les deux intégrales :*

$$\int^\infty f\,dx, \qquad \int^\infty \varphi\,dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi ; si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

En effet, si l'intégrale de $|\varphi|$ est finie, celle de $|f|$ le sera *a fortiori* (donc elle convergera) ; si l'intégrale de $|f|$ est infinie, celle de $|\varphi|$ le sera *a fortiori* (donc celle de φ ne sera pas absolument convergente).

On applique souvent ce théorème dans le cas où f est infiniment petit par rapport à φ pour $x = \infty$; il prouve alors que, si la seconde intégrale est absolument convergente, la première l'est aussi.

II. *Si φ ne change pas de signe et que le quotient $f : \varphi$ tende vers une limite* L *finie et différente de* 0 *pour* $x = \infty$, *les deux intégrales de la règle précédente seront absolument convergentes ou divergentes en même temps.*

En effet, si x croît suffisamment, $f(x)$ finit par rester compris entre $(L - \varepsilon)\,\varphi(x)$ et $(L + \varepsilon)\,\varphi(x)$. Or les deux intégrales

$$\int^\infty (L-\varepsilon)\,\varphi\,dx = (L-\varepsilon)\int^\infty \varphi\,dx \qquad \int^\infty (L+\varepsilon)\,\varphi\,dx = (L+\varepsilon)\int^\infty \varphi\,dx,$$

convergent ou divergent en même temps que celle de φ, et cela *absolument* car leur élément ne change pas de signe ; nous en concluons, par le théorème I, que l'intégrale de $f\,dx$ ayant son élément intermédiaire entre ceux des précédentes, converge ou diverge aussi en même temps.

III. *Si, pour* x *infini,* $f(x)$ *est infiniment petit d'ordre déterminé* α,

la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\int^{\infty} f dx$ *est que l'on ait* $\alpha > 1$ *et alors la convergence est absolue.*

On dit que f est infiniment petit d'ordre α si le rapport $f(x) : x^{-\alpha}$ tend vers une limite L, finie et différente de 0, pour $x = \infty$. Cette règle est donc un cas particulier de la précédente : l'intégrale de $f dx$ converge ou diverge en même temps que celle de $x^{-\alpha} dx$, laquelle converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1; \\ \operatorname{Log} x, \text{ si } \alpha = 1, \end{cases}$$

qui tend vers l'infini avec x, sauf si α est >1.

Voici quelques exemples d'application de ces règles :

Les intégrales suivantes convergent, par la règle III où $\alpha = 2$:

$$\int^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(a^2+x^2)^2}, \qquad \int^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Les intégrales suivantes (dont l'élément est moindre en valeur absolue que celui de la dernière écrite ci-dessus) sont absolument convergentes par la règle I :

$$\int^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{a^2+x^2}, \qquad \int^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x\,(a^2+x^2)}.$$

Soient a et n des quantités positives ; les intégrales suivantes (dont l'élément est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+\varepsilon}$) convergent par la même règle :

$$\int^{\infty} e^{-ax}\, dx, \qquad \int^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx, \qquad \int^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx\, dx.$$

43. Règles applicables à la convergence non absolue. — V. *Si une intégrale* F(x) *de* $\varphi(x)$ *reste finie pour* $x = \infty$, *l'intégrale*

$$\int^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx$$

converge pour toute valeur positive de α.

On a, en effet, par intégration par parties, puis passage à la limite,

$$\int_a^{x'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx = \left[\frac{F(x)}{x^{\alpha}}\right]_a^{x'} + \alpha \int_a^{x'} \frac{F(x)\, dx}{x^{1+\alpha}}$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx = -\frac{F(a)}{a^{\alpha}} + \alpha \int_a^{\infty} \frac{F(x)\, dx}{x^{1+\alpha}}$$

Or cette dernière intégrale converge par la règle II, car $F(x)\,dx : x^{1+\alpha}$ est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+\varepsilon} (\varepsilon < \alpha)$, ce qui est l'élément d'une intégrale convergente.

Par exemple les *sinus* et *cosinus* ayant leurs intégrales finies et périodiques, cette règle prouve l'existence des intégrales.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

VI. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui tend vers une limite finie pour* $x = \infty$, *formons les deux intégrales :*

$$\int^\infty f(x)\,dx, \qquad \int^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

si la première converge, la deuxième converge aussi.

En effet, par le deuxième théorème de la moyenne, on a $(x' \leqslant \xi \leqslant x'')$

$$\int_{x'}^{x''} \varphi f\,dx = \varphi(x') \int_{x'}^{\xi} f\,dx + \varphi(x'') \int_{\xi}^{x''} f\,dx.$$

Si x', x'' et, par suite, ξ tendent vers l'infini, les deux intégrales singulières du second membre tendent vers 0 par hypothèse. Comme elles sont multipliées par des quantités finies par hypothèse, le second membre tend vers 0, et avec lui, l'intégrale singulière du premier membre, ce qui prouve le théorème.

VII. *Soient* $\varphi(x)$ *une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui a pour limite* 0 *pour* $x = \infty$, *ensuite* $F(x)$ *une fonction primitive de* $f(x)$; *si* $F(x)$ *est bornée pour* $x = \infty$, $\int^\infty f(x)\,\varphi(x)dx$ *sera convergente.*

En effet, la formule de la démonstration précédente subsiste ; son second membre peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x')\Big[F(x)\Big]_{x'}^{\xi} + \varphi(x'')\Big[F(x)\Big]_{\xi}^{x''}$$

et tend vers 0 avec $\varphi(x')$ et $\varphi(x'')$, car $F(x')$, $F(\xi)$ et $F(x'')$ restent finis.

44. Définitions des intégrales de fonctions infinies. — Soit maintenant à intégrer une fonction $f(x)$ non bornée dans l'intervalle (a, b).

1° Si $f(x)$ est bornée et intégrable au même sens que précédemment dans l'intervalle $(a, b - \varepsilon)$ quelque petit que soit ε, mais illimitée dans l'intervalle $(b - \varepsilon, b)$, on pose, par définition, ε restant positif,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale *existe*

ou soit *convergente*, est que la différence des intégrales étendues aux intervalles $(a, b-\varepsilon)$ et $(a, b-\varepsilon')$, ou que l'*intégrale singulière* à laquelle elle se réduit

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\, dx,$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits (positifs) indépendants. Si l'intégrale existe, elle peut être *absolument convergente* ou non ; et, si elle n'existe pas, elle est *infinie* ou *indéterminée* comme les intégrales à limites infinies. Pratiquement, on ne rencontre guère que des intégrales absolument convergentes.

2° Si f est bornée et intégrable dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b)$ mais illimitée dans $(a, a+\varepsilon)$, l'intégrale dans (a, b) se définit par la formule analogue

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

Elle existera si l'*intégrale singulière* $\int_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f\, dx$ tend vers 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépendants.

3° Si f est bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b), sauf aux environs des extrémités a et b, on partagera l'intervalle en deux autres par un point intermédiaire c (dont le choix est indifférent) et l'intégrale dans (a, b) sera la somme de celles dans (a, c) et (c, b).

4° Plus généralement, $f(x)$ peut être bornée et intégrable dans toute portion de l'intervalle (a, b) ne contenant pas un nombre limité de *valeurs singulières* aux environs desquels elle devient infinie. Supposons, pour fixer les idées, que les valeurs a et b soient de ce nombre et désignons les autres par $x_1, x_2, \ldots$ L'intégrale étendue à (a, b) sera, par définition, la somme de celles étendues à (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots$ ce qui ramène au cas précédent. La condition d'existence de l'intégrale étendue à (a, b) est donc que chacune des intégrales singulières

$$\int_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f\, dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon'} f\, dx, \qquad \int_{x_1+\varepsilon'}^{x_1+\varepsilon} f\, dx, \ldots$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépendants.

45. Propriétés des intégrales généralisées. — I. Les définitions précédentes sont évidemment telles que, si l'on partage l'intervalle (a, b) en plusieurs parties, l'intégrale dans (a, b) sera la somme des intégrales dans chaque partie.

II. Les conditions d'existence que nous venons d'écrire expriment que l'*intégrale* $\int^x f\,dx$ *est encore une fonction continue de* x *dans l'intervalle* (a, b). En effet, en faisant tendre ε' vers 0 avant ε, on en conclut que les intégrales :

$$\int_a^{a+\varepsilon} f\,dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} f\,dx, \qquad \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f\,dx, \ldots$$

sont infiniment petites avec ε. Donc l'intégrale entre a et x est continue aux points singuliers a, x_1,... les seuls pour lesquels sa continuité soit en question.

III. On peut énoncer, pour les intégrales généralisées, un *théorème analogue à celui de la moyenne*. Ainsi, si f a une borne inférieure m ou bien une borne supérieure M dans l'intervalle (a, b), on aura

$$\int_a^b f\,dx \geqq m\,(b-a) \qquad \text{ou bien} \qquad \int_a^b f\,dx \leqq \mathrm{M}\,(b-a).$$

En effet, en admettant pour fixer les idées que b soit le seul point singulier, ces relations ont lieu quand on y remplace b par $b-\varepsilon$; elles subsistent donc, à la limite, pour $\varepsilon = 0$.

46. Règles de convergences (fonctions infinies). — I. *Supposons qu'on ait, sauf pour les valeurs singulières de* x, $|f(x)| \leqq |\varphi(x)|$ *et formons les intégrales :*

$$\int_a^b f\,dx, \qquad \int_a^b \varphi\,dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi. Si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue relatif aux intégrales à limites infinies (n° 42, I).

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $f(x)$ ne soit infinie que quand x tend vers b. La règle suivante, énoncée dans cette hypothèse spéciale, s'adaptera d'elle-même aux autres cas :

II. *Si* φ *ne change pas de signe quand* x *tend vers* b *(unique valeur singulière) et que le quotient* $f:\varphi$ *tende vers une limite* L, *finie et différente de* 0, *quand* x *tend vers* b, *les deux intégrales de la règle précédente seront en même temps absolument convergentes ou divergentes.*

La démonstration faite (n° 42, II) pour les intégrales à limites infinies se généralise d'elle-même.

III. *Si, pour chaque valeur singulière, $f(x)$ est infinie d'ordre déterminé α, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\int_a^b f(x)\,dx$ est que tous ces ordres α soient < 1 et alors la convergence sera absolue.*

Ce théorème se ramène au précédent par la définition de l'*ordre d'infinitude* : $f(x)$ est infinie d'ordre α pour $x = c$, si l'on a

$$f(x) = \frac{\psi_1(x)}{(c-x)^\alpha} \text{ (pour } x<c), \qquad f(x) = \frac{\psi_2(x)}{(x-c)^\alpha} \text{ (pour } x>c),$$

les fontions ψ_1 et ψ_2 ayant, quand x tend vers c, des limites finies et différentes de 0. Toutefois, si c est une des extrémités de l'intervalle (a, b), on ne tient compte que du seul cas où x varie dans cet intervalle.

Ceci posé, nous pouvons admettre dans la démonstration que b soit la seule valeur singulière. Il suffit alors d'appliquer l'énoncé du théorème précédent en y faisant $\varphi=(b-x)^{-\alpha}$, car l'intégrale de $(b-x)^{-\alpha}\,dx$ converge dans l'intervalle (a, b) si $\alpha<1$ et diverge si $\alpha\geqslant 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} (b-x)^{1-\alpha} : (1-\alpha), \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1\,; \\ \operatorname{Log}(b-x), \text{ si } \alpha=1, \end{cases}$$

qui est infinie quand x tend vers b, sauf si $\alpha<1$.

Par exemple, si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et 1, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

est absolument convergente, car, pour chacune des deux valeurs singulières 0 et 1, $f(x)$ est infinie d'ordre <1.

47. Intégrales généralisées élémentaires. Intégrales doublement généralisées. — Une même intégrale peut comporter en même temps les deux sortes de généralisations précédentes. C'est ce qui arrive si l'on intègre dans un intervalle infini une fonction présentant des points singuliers isolés où elle devient infinie.

Si ces points sont en nombre limité, pour définir l'intégrale de a à l'infini, on désigne par b un nombre arbitraire supérieur à toutes les valeurs singulières et l'on pose, par définition,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx.$$

Par exemple, si l'on a $0 < a < 1$, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

est *absolument convergente* comme somme de deux intégrales absolument convergentes.

Plus généralement, s'il y a une infinité de valeurs singulières isolées et que l'intégrale existe dans toute portion limitée de l'intervalle d'intégration, on la définit dans l'intervalle entier par les mêmes passages à la limite qu'au n° 41.

Quand la fonction à intégrer est positive et les valeurs singulières isolées, l'intégrale est toujours *déterminée* : sa valeur est finie ou infinie positive.

Les définitions peuvent se généraliser, mais les précédentes suffisent en pratique. Nous dirons que les intégrales qui rentrent dans ces définitions sont des *intégrales généralisées élémentaires.*

Ces intégrales sont donc celles de fonctions ne présentant que des points de discontinuité isolés.

48. Valeurs principales. — Cauchy a fait grand usage de ce qu'il appelle la *valeur principale* d'une intégrale indéterminée. Soit d'abord $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs de x. Il est possible que la définition habituelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{x', x'' = \infty} \int_{-x''}^{x'} f(x)\, dx$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe si l'on fait $x'' = x'$. Dans ce cas, cette limite sera, par définition, la *valeur principale* de l'intégrale du premier membre.

De même, soit $f(x)$ une fontion continue en tout point de l'intervalle (a, b), sauf au seul point x_1 où elle est infinie ; il se peut que la définition habituelle

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' = 0} \int_a^{x_1 - \varepsilon} + \int_{x_1 + \varepsilon'}^b f(x)\, dx$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe en faisant $\varepsilon' = \varepsilon$. Cette limite est alors, par définition, la *valeur principale* du premier membre. On aperçoit immédiatement ce que deviendra cette définition s'il y a plusieurs points singuliers entre a et b.

Par exemple, l'intégrale de $dx : x$ est indéterminée si on l'étend de -1 à $+1$, mais sa valeur principale est nulle.

49. Calcul des intégrales généralisées. Intégration par décomposition et par parties. — 1° La formule fondamentale pour le calcul des intégrales définies,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

subsiste, si l'intégrale est généralisée, pourvu que la fonction $\mathrm{F}(x)$ soit continue en tout point de l'intervalle (a, b) sans exception et qu'elle ait $f(x)$ pour dérivée sauf aux points singuliers de $f(x)$. Nous avons déjà établi ce théorème dans le premier volume (n° 233) et montré qu'il subsiste pour $b = \infty$ quand $\mathrm{F}(x)$ a une limite $\mathrm{F}(\infty)$ pour $x = \infty$.

2° La formule d'intégration par décomposition se généralise aussi. Soit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; on aura (a et b pouvant être infinis)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

pourvu que deux au moins de ces trois intégrales soient déterminées, la troisième l'étant alors nécessairement, car la limite d'une somme est toujours égale à la somme des limites supposées existantes.

Supposons qu'on sache seulement qu'une des deux intégrales du second membre est déterminée. Si l'on s'interdit de faire passer les termes d'un membre dans l'autre, on pourra encore écrire la formule précédente, mais elle signifiera seulement que les deux membres sont ou égaux ou tous deux indéterminés mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Pour justifier cette remarque, considérons un cas particulier, le raisonnement étant général. Supposons a et b finis et admettons que f, f_1 et f_2 n'aient qu'un point singulier b. Si c'est l'intégrale de f_1 qui est déterminée, on aura, η tendant vers 0 avec ε,

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \eta.$$

Donc, ε étant infiniment petit, toute restriction à l'indétermination d'un des deux membres de cette relation entraîne la même restriction pour l'autre membre.

Cette remarque a son importance pour reconnaître si une intégrale donnée est déterminée ou non, car, si l'on peut simplifier celle-ci par l'addition d'une intégrale déterminée, il suffira de raisonner sur l'intégrale simplifiée.

3° Quand la règle d'intégration par parties est encore applicable, elle résulte des précédentes. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues entre a et b mais dont les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ aient des points de discontinuité isolés. On a, par la première règle qui précède,

$$\int_a^b [f(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,f'(x)]\,dx = [f(x)\,\varphi(x)]_a^b$$

Donc, si l'une des deux intégrales

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx, \qquad \int_a^b \varphi(x)\,f'(x)\,dx$$

est déterminée, il en sera de même de l'autre et l'on aura

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = [f(x)\,\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)\,f'(x)\,dx.$$

Si a ou b est infini, le terme aux limites peut être indéterminé et il faut une condition de plus pour que la formule précédente soit légitime. Il faut, en effet, admettre que deux au moins des trois termes qu'elle renferme aient une valeur déterminée et alors ils seront déterminés tous les trois.

50. Changement de variables. — Nous allons montrer que la formule de transformation des intégrales définies établie dans le premier volume peut être généralisée. Voici cette formule, dans laquelle nous supposerons, pour fixer les idées, que T est $> t_1$:

$$(1) \qquad \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(\mathrm{T})} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

On peut énoncer la règle suivante :

Si la dérivée $\varphi'(t)$ est continue et différente de 0 dans l'intervalle (t_1, T) sauf peut être aux extrémités, la formule (1) subsiste pour les intégrales généralisées en ce sens que les deux membres seront ou bien égaux ou bien tous deux indéterminés, mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Cette règle n'exclut pas le cas où $\varphi(t)$ serait discontinue aux extrémités t_1 et T, ni celui ou t_1 et T seraient eux-mêmes infinis, mais il faut alors, comme la démonstration va le montrer, que $\varphi(t_1)$ et $\varphi(\mathrm{T})$ désignent les limites de $\varphi(t)$ quand t tend vers t_1 en décroissant ou vers T en croissant, limites qui seront finies ou infinies (de signe déterminé), puisque, φ' ne s'annulant pas, la variation de φ ne change pas de sens.

Cette remarque faite, nous pouvons démontrer la règle.

Supposons d'abord que t_1 et T soient finis et admettons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait de point singulier de $f(x)$ ou de $f(\varphi)$ qu'aux deux limites des intégrales. Quand t varie de t_1 à T, la fonction $\varphi(t)$ varie dans un seul sens et ne passe qu'une fois par les valeurs $\varphi(t_1+\varepsilon)$ et $\varphi(\mathrm{T}-\eta)$, en sorte que l'on a, sans difficulté, les deux membres étant des intégrales proprement dites,

$$(2) \qquad \int_{\varphi(t_1+\varepsilon)}^{\varphi(\mathrm{T}-\eta)} f(x)\,dx = \int_{t_1+\varepsilon}^{\mathrm{T}-\eta} f(\varphi)\,\varphi'\,dt.$$

Si l'on fait tendre ε et η vers 0, on obtient la relation (1) avec le sens que nous lui avons donné.

Par exemple, par la substitution $x = \sin^2 t$, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}\,dt$$

et, par la substitution $x = -\log t$,

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = -\int_1^0 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt.$$

Si t_1 et T étaient infinis, il faudrait simplement, pour faire la démonstration, remplacer, dans la formule (2), $t_1+\varepsilon$ par un infiniment grand négatif t' et $\mathrm{T}-\eta$ par un infiniment grand positif T′, la formule (2) subsistant avec ces nouvelles limites en vertu de la démonstration même que nous venons de faire.

Par exemple, on aura, par la substitution $x = \sqrt{t}$,

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Remarque. — Lorsque les conditions de la règle précédente ne sont pas vérifiées, il faudra le plus souvent, pour procéder avec sécurité, partager l'intervalle (t_1, T) en intervalles partiels satisfaisant aux conditions de la règle et étudier la transformation dans chaque intervalle séparément. Toutefois, dans certains cas, on pourra encore utiliser la règle suivante :

Si $\varphi(t)$ est continue entre t_1 et T *et que $\varphi'(t)$ ne soit nulle ou discontinue qu'en des points isolés de l'intervalle* (t_1, T), *la formule* (1) *subsistera pourvu que son second membre soit déterminé.*

En effet, on peut écrire la formule analogue à (1) pour chacun des intervalles de t compris entre deux points singuliers consécutifs de $\varphi'(t)$. Pour chacun d'eux, les deux membres de la formule obtenue seront déterminés et égaux. En ajoutant ces diverses formules, on retrouvera la formule (1), dont les deux membres seront donc aussi déterminés et égaux.

51. Nouvelle définition des intégrales généralisées élémentaires de fonctions positives. — Soit $f(x)$ une fonction non négative admettant une intégrale généralisée élémentaire (nº 47). Définissons une fonction auxiliaire $f_n(x)$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } f \leqslant n ; \\ n, \text{ si } f \geqslant n. \end{cases}$$

Cette fonction est bornée et n'est discontinue qu'avec f. Elle peut servir à définir l'intégrale généralisée de f par un seul passage à la limite :

Si l'intervalle d'intégration est borné, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx;$$

et, si cet intervalle est infini, soit par exemple $(-\infty, +\infty)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} f_n(x)\,dx.$$

En effet, ces limites (finies ou infinies) existent et ne peuvent surpasser les premiers membres (car $f_n \leqslant f$), il suffit donc de prouver qu'elles ne sont pas moindres.

Faisons d'abord cela pour la première formule. Il y a dans (a, b) un nombre limité de valeurs singulières où f cesse d'être borné et il suffit de prouver la formule dans l'intervalle de deux d'entre elles. Autant admettre que les valeurs singulières sont a et b. On a, dans ce cas, quelque petit que soit ε positif,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f_n\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f\,dx$$

car f_n devient égal à f entre $a - \varepsilon$ et $b + \varepsilon$. Il vient donc, à la limite quand ε tend vers zéro,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n\,dx \geqslant \int_a^b f\,dx.$$

Passons à la seconde formule. On a, par ce qui précède, quelque grand que soit N fixe,

$$\lim_{n=\infty}\int_{-n}^{+n} f_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty}\int_{-N}^{+N} f_n\,dx = \int_{-N}^{+N} f\,dx;$$

et, en faisant tendre N vers l'infini,

$$\lim_{n=\infty}\int_{-n}^{n} f_n\,dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx,$$

ce qui achève la démonstration.

52. Théorème[1]. — *Soit* $F_1, F_2, \ldots F_n, \ldots$ *une suite* NON DÉCROISSANTE *de fonctions* POSITIVES *de* x *; si chaque fonction est bornée, continue (sauf peut être pour des valeurs isolées de* x *indépendantes de* n*), et si* $F_n(x)$ *tend vers une limite finie ou infinie* $F(x)$ *quand* n *tend vers l'infini, on a*

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx,$$

que l'intervalle (a, b) *soit fini ou non, pourvu que la fonction* F *n'ait que des points de discontinuité isolés et admette, par conséquent, une intégrale élémentaire. Celle ci d'ailleurs peut être finie ou infinie.*

La démonstration est immédiate, si les fonctions F_n et F sont continues et l'intervalle (a, b) fini. L'énoncé revient à dire que l'on peut intégrer terme à terme la série de fonctions continues et positives

$$F = F_1 + (F_2 - F_1) + \cdots + (F_n - F_{n-1}) + \cdots,$$

ce qui est permis, puisque la somme est continue (*t.* I, n° 389).

Si l'intervalle (a, b) est encore fini, mais que les fonctions F_n et F cessent d'être continues ou F d'être finie en un nombre limité de points $x_1, x_2, \ldots$ on peut, comme au n° précédent, admettre que a et b soient les seules valeurs singulières. On a, dans ce cas, quelque soit ε positif, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b F_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F_n\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F\,dx.$$

Faisons tendre ε vers zéro, il vient, le second membre pouvant d'ailleurs croître indéfiniment,

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b F_n\,dx \geqslant \int_a^b F\,dx.$$

Mais l'égalité seule est possible, car le premier membre est inférieur au second quel que soit n.

[1] C'est un cas très particulier d'un théorème général. Les restrictions relatives à la continuité de F_n et de F disparaissent en considérant l'intégrale de Lebesgue (n° 108).

Enfin, si les limites a et b sont infinies, par exemple toutes les deux, on a, quel que soit N positif, d'après ce qu'on vient de prouver,

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty}\int_{-N}^{+N} F_n\,dx = \int_{-N}^{+N} F\,dx\,;$$

et il suffit de faire tendre N vers l'infini pour démontrer la proposition comme dans le cas précédent.

53. Intégrales doubles généralisées. — Nous supposons, comme dans le chapitre I, que les points de discontinuité de la fonction $f(x, y)$ à intégrer sont isolés ou répartis sur certaines lignes de discontinuité satisfaisant aux conditions du nº 4 ; mais nous admettons que la fonction ou le domaine d'intégration ne soient plus bornés. Parmi les points de discontinuité, nous appellons alors *points singuliers* ceux autour desquels la fonction n'est pas bornée.

Fonctions non négatives. — En premier lieu, si le domaine D est borné et limité par un contour C satisfaisant aux conditions du nº 1, pour définir l'intégrale d'une fonction $f(x, y)$ *non négative* :

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

on procède à peu près comme pour les intégrales simples. On commence par enlever les points singuliers du champ d'intégration. A cet effet, on entoure les points singuliers isolés d'un contour infiniment petit, on enferme les lignes de discontinuité entre deux contours infiniment voisins, et l'on considère la portion D′ de l'aire D qui est extérieure aux contours auxiliaires. L'intégrale étendue à D′ étant une intégrale proprement dite, on pose, par définition,

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim \iint_{D'} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Si cette limite est finie, l'intégrale généralisée *existe*. Il suffit évidemment pour cela, f étant positif, que le second membre soit borné quand D′ tend vers D, et alors sa limite est indépendante de la manière dont D′ tend vers D. Si l'intégrale n'existe pas, elle est infinie positive.

En second lieu, si le champ d'intégration s'étend à l'infini dans certaines directions ou dans tous les sens, on procède d'une manière analogue. On considère d'abord l'intégrale (généralisée ou non) dans une portion bornée D′ de l'aire D, puis on étend successivement D′ à

D tout entier : l'intégrale dans D est la limite finie ou infinie de celle dans D'. Cette limite sera d'ailleurs indépendante de la manière dont D' tend vers D; et, si D s'étend à l'infini dans plusieurs directions, D' peut croître à l'infini soit dans tous les sens à la fois, soit dans les diverses directions *successivement.*

Le cas des fonctions non positives se ramène à celui-ci par un simple changement de signe; il n'y a pas lieu de s'y arrêter.

Fonctions de signe variable. — *On ne reconnaît d'existence à l'intégrale double généralisée d'une fonction de signe variable que si elle est absolument convergente*, c'est-à-dire que si l'intégrale

$$\iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy$$

existe.

Si cette condition est remplie, l'intégrale de $f(x, y)$ dans D se définit par les mêmes passages à la limite que pour les fonctions positives et l'on est assuré que cette limite est finie et unique de quelque manière que D' tende vers D. En effet, la fonction f est alors la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions positives, $f_1 = |f|$ et $f_2 = |f| - f$, dont les intégrales existent.

Remarque. Si f est positif, son intégrale généralisée dans D peut encore se définir à l'aide de la fonction auxiliaire :

$$f_n = \begin{cases} n, \text{ si } f \geqslant n\,; \\ f, \text{ si } f \leqslant n. \end{cases}$$

En effet, si D est borné, on a

$$\iint_D f \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \iint_D f_n \, dx \, dy;$$

et, si D n'est pas borné, on a, D_n tendant vers D quand n tend vers l'infini

$$\iint_D f \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \iint_{D_n} f_n \, dx \, dy.$$

Les démonstrations se font comme pour les intégrales simples.

54. Réduction des intégrales doubles généralisées de fonctions positives [1]. — *Si $f(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine* D *borné*

[1] La réduction se fait toujours avec l'intégrale de Lebesgue (nº 109); elle est donc possible avec les autres intégrales (qui en sont des cas particuliers) *à condition de fournir un résultat déterminé*. Les règles particulières comme celle-ci ne se justifient qu'à la condition d'être très élémentaires. C'est le but que nous poursuivons ici.

ou non, son intégrale dans D *se réduit à deux intégrales simples consécutives par la règle ordinaire, pourvu que l'intégration par rapport à la première variable fournisse une fonction de la seconde qui soit intégrable au sens élémentaire, c'est-à-dire qui n'ait que des points de discontinuité isolés.* Cette règle s'applique que l'intégrale double soit finie ou infinie.

Premier cas : *L'intégrale double est étendue à tout le plan.* Définissons f_n comme au n° précédent et posons

$$F_n(x) = \int_{-n}^{+n} f_n \, dy.$$

Soit D' la portion de D entre les abscisses — N et + N, D'_n celle de D' entre les ordonnées — n et + n. Utilisons la remarque qui termine le n° précédent. Il vient, en réduisant une intégrale proprement dite,

$$\iint_{D'} f \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \iint_{D'_n} f_n \, dx \, dy = \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{N} F_n(x) \, dx.$$

La fonction $F_n(x)$ est continue, sauf peut être pour les abscisses d'une ligne de discontinuité de $f(x, y)$ parallèle à l'axe des y, celles-ci supposées en nombre limité entre — N et N. On peut donc appliquer le théorème du n° 52 et il vient, en remplaçant F_n par sa limite,

$$\iint_{D'} f \, dx \, dy = \int_{-N}^{+N} dx \int_{-\infty}^{\infty} f \, dy.$$

Si l'on fait tendre N vers l'infini, D' tend vers D et l'on obtient, à la limite, la formule à démontrer :

$$\iint_{D} f \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f \, dy.$$

Cas Général. — Les autres cas se ramènent au précédent à l'aide d'une fonction auxiliaire f_1 égale à f dans le domaine D et à zéro en dehors. L'intégrale de f dans D revient à celle de f_1 dans tout le plan, laquelle se réduit par la formule précédente. En négligeant les intervalles où f_1 est nulle, cette formule de réduction revient à celle relative à f.

Remarque, — Si f change de signe dans le domaine D, le procédé le plus simple pour légitimer la réduction sera généralement de partager le domaine D en plusieurs autres où f n'a qu'un seul signe et d'effectuer la réduction dans chacun d'eux.

55. **Inversion des intégrations.** — *Si f ne change pas de signe, on aura, les limites étant finies ou infinies mais constantes,*

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy = \int_b^B dy \int_a^A f\,dx,$$

pourvu que les intégrales intérieures soient des fonctions continues de x et de y respectivement, sauf en des points isolés.

En effet, les deux membres représentent la même intégrale double, car on peut intervertir les variables x et y dans les formules du n° précédent.

56. **Transformation des intégrales doubles généralisées.** — Soient Ω un domaine, limité ou non, dans le plan uv, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ deux fonctions continues, dont le jacobien J soit également continu et différent de 0 dans l'intérieur de Ω. On ne stipule rien sur la frontière. Supposons que les formules :

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

fassent correspondre uniformément les *points intérieurs* à Ω aux *points intérieurs* à une aire D, limitée ou non, dans le plan xy. On aura

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Omega |\,J\,|\,f(\varphi, \psi)\,du\,dv.$$

En effet, représentons par Ω' un domaine limité, intérieur à Ω, dans lequel f est continue, et qui tend vers Ω; le domaine correspondant D′ sera aussi limité et tendra vers D. L'équation précédente a lieu sans difficulté quand on y accentue D et Ω (n° 19) ; elle subsiste donc à la limite, et c'est précisément ce qu'on écrit en supprimant les accents.

Le sens de l'équation précédente est le même que pour la formule de transformation des intégrales simples (n° 50). Les deux membres sont soit égaux, soit tous deux indéterminés mais alors avec les mêmes limites d'indétermination.

§ 2. Intégration et dérivation des intégrales définies par rapport à un paramètre. Convergence uniforme des intégrales généralisées.

57. **Intégration par rapport à un paramètre.** — Soit $f(x, \alpha)$ une fonction continue des deux variables x et α dans un domaine rectan-

gulaire R, limité par les valeurs a et b de x et par les valeurs α_0 et α_1 de α ; l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

est comme nous l'avons démontré au n° 3 (où y remplace α) une fonction continue de α dans l'intervalle (α_0, α_1). On peut se proposer d'intégrer ou de dériver cette fonction.

Si l'on intègre $\varphi(\alpha)$, on tombe sur une intégrale double

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

On peut utiliser pour la calculer toutes les méthodes de transformation étudiées dans le premier chapitre, mais la plus employée est la *règle d'intégration sous le signe* qui consiste à intervertir les intégrations par rapport à x et α. Toutefois il ne faut pas oublier que cette règle n'est établie que pour les intégrales proprement dites. Nous verrons tout à l'heure qu'elle ne s'étend aux intégrales généralisées que sous des conditions particulières.

58. Dérivation par rapport à un paramètre. Règle de Leibnitz. — Considérons, comme au n° précédent, l'intégrale proprement dite

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha) dx$$

et supposons que la fonction $f(x, \alpha)$ ait une dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ déterminée et continue dans le rectangle limité par les valeurs a et b de x, α_0 et α_1 de α. La dérivée de $\varphi(\alpha)$ dans l'intervalle (α_0, α_1) s'obtiendra en dérivant simplement par rapport à α la fonction sous le signe d'intégration. Cette règle est celle de la *dérivation sous le signe* ou *règle de Leibnitz*. C'est une conséquence de la précédente.

Soit, en effet, α un point quelconque de l'intervalle (α_0, α_1) ; on a, par la règle d'intégration sous le signe,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \int_a^b [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0).$$

La dérivée du premier membre par rapport à α est la fonction sous le signe d'intégration extérieur. Il vient donc, en égalant les dérivées des deux membres extrêmes,

$$\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \varphi'(\alpha).$$

C'est la règle de Leibnitz.

Cette règle suppose que les limites a et b sont indépendantes de α. Considérons maintenant une intégrale dont les limites x_1 et x_2 soient des fonctions de α, par exemple

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha)\, dx. \qquad (x_2 > x_1).$$

Nous supposerons : 1° que x_1 et x_2 sont deux fonctions continues de α ayant des dérivées également continues dans l'intervalle (α_0, α_1); 2° que la dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ est déterminée et continue dans le domaine D du plan $x\alpha$ compris entre les droites $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ et les courbes $x = x_1$, $x = x_2$.

Je dis que l'on aura, sous ces conditions, dans l'intervalle (α_0, α_1),

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(x_2, \alpha)\frac{dx_2}{d\alpha} - f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha},$$

c'est-à-dire que l'on doit ajouter deux termes complémentaires à celui fourni par la règle de Leibnitz.

Cette nouvelle règle se ramène à celle de Leibnitz par un changement de variables. Substituons, en effet, à x une nouvelle variable d'intégration t par la relation

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t,$$

de sorte que x est maintenant fonction de t et de α et coïncide avec x_1 pour $t = 0$ et avec x_2 pour $t = 1$. L'intégrale transformée sera

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha)\frac{\partial x}{\partial t}\, dt.$$

La fonction à intégrer et sa dérivée partielle par rapport à α sont des fonctions continues de t et de α dans le rectangle du plan $t\alpha$ compris entre les valeurs 0 et 1 de t, α_0 et α_1 de α. La règle de Leibnitz s'applique donc à l'intégrale transformée (aux limites constantes 0 et 1) ; elle donne

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t} + f\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \alpha}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial t}\, dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + \left[f\frac{dx}{d\alpha}\right]_{t=0}^{t=1}$$

C'est, sous une autre forme, la formule qu'il fallait démontrer.

59. Convergence uniforme des intégrales généralisées. — Les règles précédentes et la continuité même de $\varphi(\alpha)$ reposent sur les hypothèses : 1° que $f(x, \alpha)$ et sa dérivée partielle (s'il s'agit de la règle de

Leibnitz) sont des fonctions continues; 2° que l'intervalle d'intégration est limité. Ces règles peuvent tomber en défaut pour les intégrales généralisées, et, pour reconnaître quand elles demeurent légitimes, il est commode d'introduire une notion nouvelle, celle de la *convergence uniforme* des intégrales généralisées. Nous nous bornerons ici aux premières notions sur cette question. Il y a deux cas principaux à considérer :

1° Examinons d'abord le cas où la fonction est continue sous le signe $\int$ mais où une limite de l'intégrale est infinie. Soit donc

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx.$$

Nous dirons que *cette intégrale converge uniformément pour un certain mode de variation de* α, *par exemple dans l'intervalle* (α_0, α_1), *si à tout nombre positif* ε *si petit qu'il soit correspond un nombre* X, *indépendant de* α, *tel qu'on ait, sous la condition* $X' > X$, *et pour toutes les valeurs considérées de* α,

$$\left|\int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon.$$

2° Considérons, en second lieu, le cas où la fonction $f(x, \alpha)$ peut croître indéfiniment pour certaines valeurs de x et α, mais est continue en tout point aux environs duquel elle reste finie. Ce cas est plus complexe que le précédent, car la répartition des points de discontinuité dans le plan (x, α) peut être plus ou moins compliquée. Ces points peuvent être isolés ou bien se suivre d'une manière continue sur certaines lignes. Pour simplifier, nous nous bornerons au cas le plus simple mais le plus fréquent, celui ou $f(x, \alpha)$ n'est infinie que pour un nombre limité de valeurs de x indépendantes de α.

Cette condition peut se réaliser de deux manières différentes, soit que $f(x,\alpha)$ ne devienne infinie qu'en des points isolés du plan (x,α) soit qu'elle devienne infinie le long de certaines droites parallèles à l'axe des x. Les deux intégrales suivantes sont des exemples de ces deux cas :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \qquad \int_0^1 x^{-\alpha}(1 - x)\, dx.$$

Dans la première, la fonction sous le signe n'est infinie qu'en un point isolé (l'origine) ; dans la seconde, elle est discontinue tout le long de l'axe des α positifs. Dans les définitions et les théorèmes qui vont suivre, cette distinction est indifférente.

Sous les conditions précédentes, l'uniformité de la convergence des intégrales de fonctions discontinues est tout analogue à celle des intégrales à limites infinies et les théorêmes relatifs à ces diverses intégrales vont s'énoncer dans les mêmes termes.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

où nous supposerons que $f(x, \alpha)$ ne devient infinie que pour $x = b$. Nous dirons qu'*elle converge uniformément pour un certain mode de variation de* α, *si à tout membre positif* ε *si petit qu'il soit correspond un autre nombre positif* δ *indépendant de* α *et tel qu'on ait, sous la condition* $0 < \delta' < \delta$,

$$\left| \int_{b-\delta'}^{b} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

On voit immédiatement comment il faut modifier la définition précédente si c'est pour $x = a$ que f est ou peut devenir infinie. Si cette fonction peut devenir infinie pour plusieurs valeurs x_1, x_2,... de x, on partagera l'intervalle d'intégration et, en même temps, l'intégrale proposée en plusieurs autres dans lesquels f ne devient infinie qu'à l'une des limites. Enfin, si f a des points de discontinuité en nombre limité et si, de plus, l'intégrale est à limite infinie, le partage pourra se faire en plusieurs intégrales pareilles aux précédentes avec en plus une intégrale de fonction continue mais à limite infinie. Si chacune de ces intégrales composantes converge uniformément, il en sera de même pour la proposée.

Dans les conditions où nous venons de la définir, la convergence uniforme des intégrales généralisées correspond exactement à la convergence uniforme des séries étudiée dans le premier volume. Montrons, en effet, qu'une intégrale généralisée *uniformément convergente* peut se mettre sous forme d'une série uniformément convergente d'*intégrales proprement dites.*

Si l'intégrale est à limite infinie, on désignera par b_1, b_2,... b_n,.. une suite de nombres croissant à l'infini et on écrira.

$$\int_a^\infty f\, dx = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\, dx + \cdots$$

Si l'intégrale du premier membre converge uniformément, il en est de même de la série du second membre et réciproquement.

D'autre part, si, l'intégrale étant à limites finies, la fonction sous le signe ne devient infinie qu'à l'une des limites, par exemple à la limite supérieure b, on désignera par b_1, $b_2, \ldots$ $b_n, \ldots$ une suite croissante de nombres tendant vers b et on écrira

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx + \cdots$$

Si l'intégrale du premier membre converge uniformément, il en sera de même de la série du second membre et réciproquement.

Il s'ensuit que l'on pourra appliquer immédiatement aux intégrales uniformément convergentes les théorèmes correspondants relatifs à la continuité, à l'intégration et à la dérivation des séries. Il est donc très utile de savoir reconnaître l'uniformité de la convergence. La règle suivante est loin d'être générale mais suffit dans beaucoup de cas.

60. Criterium de convergence uniforme. — *Une intégrale généralisée qui dépend d'un paramètre converge uniformément si ses éléments successifs ne surpassent pas en valeur absolue les éléments correspondants d'une intégrale absolument convergente, prise entre les mêmes limites, mais ne renfermant pas le paramètre.*

Nous pouvons borner la démonstration au cas d'une intégrale à limite infinie car elle est analogue pour les autres cas. Comparons donc les deux intégrales :

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx, \qquad \int_a^\infty |\,\varphi(x)\,|\,dx,$$

en supposant que la seconde converge et qu'on ait constamment $|\,f(x, \alpha)\,| \leqslant |\,\varphi(x)\,|$. On aura évidemment l'inégalité

$$\left|\int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant \int_{X'}^\infty |\,\varphi(x)\,|\,dx.$$

Mais, puisque $\int_a^\infty |\,\varphi(x)\,|\,dx$ converge par hypothèse, à tout nombre ε correspond un nombre X tel que le second membre de cette inégalité soit $< \varepsilon$ pourvu que X′ soit $>$ X. Alors le premier membre est *a fortiori* $\leqslant \varepsilon$, ce qui est, par définition, la condition de convergence uniforme à démontrer.

Il doit être d'ailleurs bien entendu que la fonction $f(x, \alpha)$ satisfait aux conditions de continuité que comporte la définition de la convergence uniforme donnée au nº précédent.

61. Continuité, intégration, dérivation des intégrales uniformément convergentes. — I. *Une intégrale généralisée qui contient un paramètre α est fonction continue du paramètre dans tout intervalle où la convergence est uniforme.*

II. *Quand l'expression sous le signe est positive, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale généralisée soit fonction continue du paramètre α qu'elle contient est que la convergence soit uniforme.*

III. *L'intégration sous le signe d'une intégrale généralisée par rapport à un paramètre α, demeure légitime dans tout intervalle fini où la convergence est uniforme.*

IV. *Quand l'expression à intégrer est positive, une intégrale fonction continue du paramètre α peut toujours être intégrée sous le signe entre des limites finies.*

V. *Une intégrale généralisée, fonction du paramètre α et uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1), peut s'intégrer sous le signe entre α_0 et un point variable α de l'intervalle (α_0, α_1), et la nouvelle intégrale ainsi obtenue est encore uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1).*

En répétant l'application du théorème et de la règle précédente, on voit que l'intégration entre α_0 et α d'une intégrale uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1), peut être effectuée sous le signe un nombre quelconque de fois de proche en proche et que l'intégrale obtenue après un nombre quelconque d'intégrations sera uniformément convergente dans le même intervalle que la proposée.

VI. *Lorsque la dérivation sous le signe d'une intégrale proprement dite ou d'une intégrale généralisée (supposée existante) conduit à une intégrale généralisée, la règle de Leibnitz demeure légitime, c'est-à-dire que l'intégrale proposée a pour dérivée l'intégrale fournie par la règle, pourvu que cette dernière intégrale converge uniformément dans le voisinage de la valeur considérée du paramètre.*

Comme il est bien entendu que les conditions de continuité que comporte la définition de la convergence uniforme (n° 59) sont vérifiées, tous ces théorèmes se ramènent aux théorèmes analogues de la théorie des séries (*t.* I, n° 377 et 379) en écrivant les intégrales sous forme de séries uniformément convergentes.

A titre d'exemple, considérons une intégrale à limite infinie,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx,$$

uniformément convergente dans un intervalle (α_0, α_1), et montrons qu'on peut l'intégrer sous le signe dans cet intervalle (règle IV).

Ecrivons, sous forme de série uniformément convergente,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \cdots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx + \cdots$$

Cette série peut être intégrée terme à terme et chaque terme peut s'intégrer sous le signe ; on obtient ainsi la série, uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1),

$$\int_\alpha^\alpha \varphi(\alpha)\, d\alpha = \Sigma \int_{b_{n-1}}^{b_n} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f\,dx = \int_a^\infty dx \int_{\alpha_0}^\alpha f\,d\alpha,$$

et cette dernière intégrale converge uniformément comme la série.

§ 3. Calcul d'intégrales définies par des artifices divers.

62. Valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$. — Cette intégrale a déjà été calculée dans le premier volume (n° 238). Nous allons indiquer un nouveau procédé, beaucoup plus rapide, pour l'obtenir. Considérons l'intégrale double, étendue à la portion D du plan comprise entre les demi-axes de coordonnées positives,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dD.$$

Soit d'abord D′ la portion de D limitée par un arc de cercle de rayon r autour de l'origine. On aura, en faisant la réduction en coordonnées polaires r et θ,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2} d\,D' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-r^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-r^2})$$

Si l'on fait tendre r vers ∞, D′ embrasse successivement tous les points de D ; l'intégrale précédente restant finie et la fonction à intégrer positive, l'intégrale dans D sera la limite de la précédente. Il vient donc

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}\cdot$$

D'autre part, limitons dans l'aire D un carré D'' par les droites $x = r$ et $y = r$. On aura

$$\iint_{D''} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^r e^{-x^2}\,dx \int_0^r e^{-y^2}\,dx = \left[\int_0^r e^{-x^2}\,dx\right]^2.$$

Mais D' est intérieur à D'' et D'' l'est à D ; donc les intégrales dans D', D'' et D se suivent par ordre de grandeur, leurs racines carrées aussi, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^{-r^2}} < \int_0^r e^{-x^2}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Si r tend vers l'infini, le premier membre de ces inégalités tend très rapidement vers le troisième ; il vient donc

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et l'on voit que l'intégrale $\int_0^r e^{-x^2}\,dx$ converge rapidement vers cette limite quand r augmente. Cette intégrale joue un rôle important en calcul des probabilités.

63. Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. — Dans le premier volume (nº 213), nous avons obtenu les deux intégrales suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C, \\ \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \end{cases}$$

On en conclut, comme cas particulier,

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}\,.$$

Tous les éléments de cette intégrale deviennent maxima et positifs pour $\alpha = 0$, et comme l'intégrale converge encore pour cette valeur, elle converge uniformément de quelque manière que varie α (nº 60). Intégrons donc deux fois de suite de 0 à α, ce qui se fera sous le signe (nº 61) ; il vient

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = \int_0^\alpha \operatorname{arc\,tg}\alpha\,d\alpha = \alpha\operatorname{arc\,tg}\alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2}$$

Supposons α positif et changeons x en $x : \alpha$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2\alpha}\,.$$

Considérons cette intégrale comme dépendant du paramètre $1 : \alpha$; tous ses éléments deviennent maxima et positifs pour $1 : \alpha = 0$, valeur qui laisse l'intégrale convergente. Donc l'intégrale converge uniformément (n° 60) pour les valeurs nulles ou positives de $1 : \alpha$ et elle est fonction continue de $1 : \alpha$ (n° 61). Faisons donc tendre α vers l'infini ou $1 : \alpha$ vers 0 ; il vient, à la limite.

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Cette intégrale en donne d'autres. On peut d'abord intégrer par parties en considérant $dx : x^2$ comme une différentielle, ce qui donne l'intégrale du titre. On peut ensuite remplacer $1 - \cos x$ par $2 \sin^2 (x : 2)$ et prendre $x : 2$ comme variable d'intégration. On trouve ainsi les deux résultats :

$$(4) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Soit α un paramètre positif. Changeons la variable d'intégration x en αx dans l'intégrale (4), ce qui n'altère pas les limites ; il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{si } \alpha > 0.$$

Donc, pour α positif, cette intégrale a une valeur constante indépendante de α. Si l'on change le signe de α, tous les éléments de l'intégrale changent de signe, donc l'intégrale aussi, sa valeur sera donc $-\pi : 2$. Enfin, si $\alpha = 0$, tous les éléments sont nuls, donc l'intégrale l'est aussi. En résumé,

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } \alpha < 0, \\ 0, & \text{si } \alpha = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ainsi cette intégrale est une fonction discontinue du paramètre, sa valeur change brusquement quand α atteint ou dépasse la valeur 0. On peut en conclure, à cause du théorème I du n° 61, que la convergence ne peut être uniforme quand α tend vers 0, ce qu'il est facile de vérifier directement. On a, en effet, pour α positif,

$$\int_N^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_{N\alpha}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

et sous cette forme, on voit immédiatement que la convergence sera uniforme si α ne tend pas vers zéro et ne le sera pas si α tend vers zéro.

L'intégrale (5) fournit, en même temps, un exemple d'une intégrale qu'il n'est pas permis de dériver sous le signe par rapport à α. La fonction étant constante, sa dérivée est nulle, tandis que la dérivation sous le signe conduit à une intégrale indéterminée.

64. Intégrales calculées par dérivation sous le signe. — I. Si, dans l'intégrale du n° 62, on change x en $x : \sqrt{t}$ où t est > 0, il vient

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

En dérivant sous le signe par rapport à t, il vient

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

Plus généralement, après n dérivations, on trouve, pour $t > 0$,

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{1}{t^n\sqrt{t}}.$$

Ces dérivations sont permises par le théorème IV du n° 61. En effet, les intégrales ainsi obtenues convergent *uniformément* quand t varie sans descendre en dessous d'un nombre positif α, si petit soit-il. Elles convergent effectivement pour la valeur $t = \alpha$ qui rend leurs éléments maxima et positifs.

II. Considérons ensuite l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$; il vient encore, par le théorème VI du n° 61,

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\alpha} = -\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx.$$

En effet, cette intégrale converge *uniformément*, car ses éléments sont inférieurs en valeur absolue à ceux de l'intégrale convergente et à éléments positifs qu'on en déduit par la suppression du facteur $\sin 2\alpha x$. Mais, en considérant $-2xe^{-x^2}dx$ comme la différentielle de e^{-x^2}, cette intégrale se ramène à la proposée par une intégration par parties. On trouve

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\alpha} = -2\alpha\mathrm{I}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = -2\alpha\,d\alpha, \qquad \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0} = e^{-\alpha^2}$$

Observons que $\mathrm{I}_0 = \sqrt{\pi} : 2$ (n° 62), il vient

$$(8) \qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

III. Soit α positif; faisons la différence,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx - \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} \frac{dx}{x},$$

de deux intégrales uniformément convergentes quand α ne tend pas vers zéro, la première comme on l'a vu au n° 63 et la seconde par le criterium du n° 60. Nous trouvons l'intégrale, uniformément convergente dans les mêmes conditions,

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} \frac{dx}{x}.$$

D'où, en dérivant deux fois ce dernier membre par la règle de Leibnitz, ce qui fournit des intégrales absolument et uniformément convergentes,

$$I' = -\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \qquad I'' = \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = I.$$

On a donc $I'I'' = II'$, d'où $I'^2 = I^2 + C$. Mais cela doit se réduire à $I' = -I$, car en faisant tendre α vers 0, il vient $I_0 = -I'_0 = \frac{\pi}{2}$. On en conclut $I' : I = -1$, d'où $I : I_0 = e^{-\alpha}$. Par conséquent pour $\alpha > 0$,

$$\text{(9)} \qquad \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}.$$

65. Intégrales de la diffraction. — Revenons à l'intégrale (**6**)

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{t}},$$

qui, comme on l'a vu, converge *uniformément* si t varie sans descendre en dessous d'un nombre positif α. Multiplions cette équation par $\sin t$, ce qui, l'élément de l'intégrale étant diminué, n'altère pas l'uniformité de la convergence, puis intégrons par rapport à t entre deux nombres positifs α et $\beta > \alpha$; on peut intégrer sous le signe et il vient

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_\alpha^\beta e^{-tx^2} \sin t \, dt$$

En effectuant l'intégration sous le signe par la formule (**2**), il vient

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sin \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} x^2 dx}{1+x^4} + \cos \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} dx}{1+x^4} \right]$$
$$- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sin \beta \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x^2} x^2 dx}{1+x^4} + \cos \beta \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x^2} dx}{1+x^4} \right]$$

Les quatre intégrales du second membre se réduisent pour α et $\beta = 0$ aux deux suivantes [1] :

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Les quatre intégrales en question convergent donc uniformément si α et β varient sans devenir négatifs, car elles convergent pour les valeurs $\alpha = \beta = 0$ qui rendent tous leurs éléments maxima et positifs. Faisons donc tendre α vers 0 et remplaçons β par u ; il vient, à la limite, les intégrales étant fonctions continues de α (n° 61),

$$\int_0^u \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2 dx}{1+x^4} + \cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2}\, dx}{1+x^4}\right].$$

Si, au lieu de multiplier par $\sin t$, on avait multiplié par $\cos t$, on aurait obtenu, par un calcul analogue,

$$\int_0^u \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\cos u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2} x^2 dx}{1+x^4} - \sin u \int_0^\infty \frac{e^{-ux^2}\, dx}{1+x^4}\right].$$

Les intégrales des premiers membres dans ces deux dernières relations se rencontrent dans la théorie de la *diffraction*. Ces relations sont dues à Gilbert et elles jouent un rôle important dans cette théorie.

Si l'on fait croître u à l'infini, les intégrales qui multiplient $\sin u$ et $\cos u$ décroissent constamment et tendent vers 0. En effet, en négligeant x^4 au dénominateur, on voit qu'elles sont respectivement moindres que les suivantes, obtenues au n° précédent :

$$\int_0^\infty e^{-ux^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{u}}, \qquad \int_0^\infty e^{-ux^2} x^2 dx = \frac{1}{4u}\sqrt{\frac{\pi}{u}}.$$

On aura donc, à la limite, pour $u = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

[1] Celles-ci sont égales entre elles, car elles se réduisent l'une à l'autre en changeant x en $1:x$ elles sont donc aussi égales à leur demi-somme et l'on a effectivement

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2-x\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arc\,tg}(x\sqrt{2}-1)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Si, dans celles-ci, on change encore t en $\frac{\pi}{2}x^2$, il vient

(10) $$\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}x^2 dx = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}.$$

On donne à ces dernières intégrales le nom *d'intégrales de la diffraction.*

66. Intégrales de Frullani. — On donne ce nom à certaines intégrales dont la valeur se détermine par la considération d'une intégrale singulière. Soit $f(x)$ une fonction continue de x, telle que l'intégrale à limite infinie

$$\int_A^\infty f(x)\frac{dx}{x} \qquad (A>0)$$

ait une valeur déterminée ; soient ensuite a et b deux constantes positives ; l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

est une intégrale de *Frullani*. Pour en déterminer la valeur, écrivons

$$I = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}dx\right]$$
$$= \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{a\varepsilon}^\infty - \int_{b\varepsilon}^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon=0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}.$$

La valeur de cette intégrale singulière s'obtient par le théorème de la moyenne. Soit ξ une quantité comprise entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$ et qui tend vers 0 avec ε, on a

$$\lim\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = \lim f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dx}{x} = f(0)\operatorname{Log}\frac{b}{a}.$$

Par conséquent,

(11) $$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = f(0)\operatorname{Log}\frac{b}{a}.$$

Par exemple, prenant $f(x) = \cos x$, puis $f(x) = e^{-x}$, il vient $(a>0)$

(12) $$\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos ax}{x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}dx = \operatorname{Log} a.$$

Souvent une intégrale peut se ramener à la forme (11) par un changement de variables. Ainsi, par la relation $x = e^{-z}$, il vient (a et $b > -1$)

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\operatorname{Log} x}\, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)z} - e^{-(b+1)z}}{z}\, dz = \operatorname{Log} \frac{b+1}{a+1}.$$

EXERCICES.

1. On a, par la relation $x = \operatorname{tg} \varphi$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{8} \operatorname{Log} 2.$$

En effet, $(1 + \operatorname{tg}\varphi)$ peut s'écrire $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) : \cos\varphi$ et est par conséquent un produit de trois facteurs ; donc l'intégrale peut se décomposer en une somme de trois autres. On voit de suite que les deux dernières se détruisent et la première donne la valeur cherchée.

2. Déduire la seconde intégrale ci-dessous de la première :

$$2\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2}\, dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

R. On intègre par rapport à α de a et b et change x en $1 : x$.

3. Montrer que l'on a, si a est > 0,

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a}. \qquad \int_0^\infty e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

R. Les deux relations sont équivalentes. La seconde intégrale a pour dérivée par rapport à a l'expression

$$\int_0^\infty e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2}\, dx - \int_0^\infty e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2} \frac{a\, dx}{x^2},$$

qui est nulle car ces deux intégrales se détruisent (elles se ramènent l'une à l'autre en changeant x en $a : x$). La seconde des deux intégrales proposées est donc constante par rapport à a et on la détermine en posant $a = 0$.

4. Montrer (en développant en série par rapport à a) que l'on a

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x} \cos(a \sin x)\, dx.$$

5. Montrer, en développant $\operatorname{Log}(1+x)$ en série potentielle, que l'on a (la série numérique étant connue)

$$\int_0^1 \operatorname{Log}(1+x)\frac{dx}{x} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

§ 4. Intégration des différentielles totales.

67. Cas de deux variables indépendantes. — Soient x et y deux variables indépendantes, P (x, y) et Q (x, y) deux fonctions continues et uniformes ainsi que leurs dérivées partielles premières. On dit que l'expression P dx + Q dy est une *différentielle exacte* s'il existe une fonction u des deux variables x et y dont cette expression soit la différentielle totale, en sorte qu'on ait

$$(1) \qquad du = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy.$$

En général l'expression P dx + Q dy n'est pas une différentielle exacte. En effet, la relation (1) revient, par définition, aux deux suivantes :

$$\mathrm{P} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{dx\,\partial y}, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}.$$

Les seconds membres étant égaux, on voix que Pdx + Qdy ne peut être une différentielle exacte que si l'on a *identiquement*, c'est-à-dire x et y restant arbitraires et indépendants,

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}.$$

Telle est la condition *nécessaire* pour que Pdx + Qdy soit une différentielle exacte. J'ajoute que cette condition nécessaire est aussi *suffisante* et, pour le prouver, je vais montrer que, si elle a lieu, l'intégrale u de l'équation (1) s'obtiendra par deux quadratures.

La fonction inconnue u est d'abord assujettie à la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{P}(x, y).$$

Soit a une constante choisie à volonté, l'intégrale définie

$$\int_a^x \mathrm{P}(x, y)\,dx$$

effectuée en considérant y comme une constante, est une solution particulière de cette équation. La solution générale s'obtient en lui ajoutant une constante arbitraire par rapport à x, c'est-à-dire ici une fonction arbitraire $\varphi(y)$. Nous poserons donc

$$(3) \qquad u = \int_a^x \mathrm{P}(x,y)dx + \varphi(y).$$

Il reste à déterminer, si c'est possible, la fonction φ de manière à vérifier la seconde condition

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

c'est-à-dire, à cause de (**3**) et par la règle de Leibnitz,

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Mais on a, en vertu de l'identité (**2**), supposée vérifiée,

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(x, y) - Q(a, y),$$

ce qui réduit la relation précédente à

$$\varphi'(y) = Q(a,y), \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(y) = \int Q(a, y)\,dy.$$

Enfin, en substituant cette valeur de φ dans (**3**), et en mettant en évidence la constante C comprise dans l'intégrale indéfinie, on trouve

(**4**) $$u = \int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy + C.$$

On voit donc que, si la condition (**2**) a lieu, l'équation (**1**) admet une infinité d'intégrales ne différant l'une de l'autre que par la valeur de la constante d'intégration C.

La constante a pouvant être prise à volonté, on la choisira, dans chaque cas particulier, de manière à simplifier autant que possible les intégrations.

Il est clair qu'on aurait pu procéder dans l'ordre inverse et commencer l'intégration par rapport à y. Alors, b désignant une constante choisie à volonté, on aurait obtenu

(**5**) $$u = \int_b^y Q(x, y)\,dy + \int P(x, b)\,dx + C.$$

Soit, par exemple, l'expression

$$(3x^2 + 2y)\,dx + 2(x + y)\,dy.$$

C'est une différentielle exacte, car on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2.$$

Calculons son intégrale en faisant $a = 0$ dans la formule (**4**); il vient

$$u = \int_0^x (3x^2 + 2y)\,dx + \int 2y\,dy = x^3 + 2xy + y^2 + C.$$

68. Remarque. — Les formules (4) et (5) supposent les fonctions P et Q continues et uniformes ainsi que leurs dérivées premières pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui interviennent dans les formules. Si ces conditions sont réalisées dans tout le plan, il n'y a aucune difficulté. Plus généralement, si elles sont réalisées dans le rectangle R compris entre les abscisses a_1 et a_2, les ordonnées b_1 et b_2, la formule (4) est applicable dans ce rectangle à condition de choisir a entre a_1 et a_2 et la formule (5) à condition de choisir b entre b_1 et b_2. En effet tous les systèmes de valeurs de x, y à considérer dans ces formules restent alors compris dans le rectangle R.

Ces formules mettent en évidence que, pour chaque valeur de la constante arbitraire C, *l'intégrale u est une fonction continue et uniforme de x et de y dans le rectangle* R où ces conditions sont réalisées.

69. Cas de trois variables indépendantes. — La méthode précédente s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais il suffira de développer les calculs pour trois variables. Soient P, Q, R trois fonctions continues de x, y, z ainsi que leurs dérivées premières. On dit que l'expression

$$(6) \qquad P dx + Q dy + R dz.$$

est une *différentielle exacte*, s'il existe une fonction u des trois variables x, y, z dont elle est la différentielle totale. Il faut, pour cela que u satisfasse aux trois équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Comme les dérivées secondes sont indépendantes de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations, on obtient *trois conditions nécessaires* pour que l'expression proposée soit une différentielle exacte, savoir

$$(7) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*, car nous allons montrer que, si elles ont lieu, l'intégrale u de l'expression (6) s'obtiendra par des quadratures.

En effet, cette intégrale a d'abord P comme dérivée par rapport à x, donc elle est comprise dans la formule générale

$$(8) \qquad u = \int_a^x P(x, y, z)\, dx + \varphi(y, z),$$

où a est une constante choisie à volonté et φ une fonction arbitraire de y et z.

Pour que u ait pour différentielle totale l'expression (**6**), il faut encore que l'on ait

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = Q dy + R dz.$$

Mais on a, par la règle de Leibnitz et en observant que P'_y, étant identique à Q'_x, s'intègre immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) - Q(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

De même,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) - R(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Par ces relations, l'équation (**9**) se réduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi = Q(a,y,z)\, dy + R(a,y,z)\, dz.$$

Donc la détermination de φ dépend de l'intégration d'une expression différentielle à deux variables. La condition d'intégrabilité est vérifiée en vertu des équations (**7**). Donc φ se détermine par la méthode établie précédemment (n° 67). En désignant par b une nouvelle constante choisie à volonté, et en remplaçant φ par sa valeur dans (**8**), on voit que l'expression (**6**) a une infinité d'intégrales comprises dans la formule générale

$$u = \int_a^x P(x,y,z)\, dx + \int_b^y Q(a, y, z)\, dy + \int R(a,b,z)\, dz.$$

Les conditions de continuité supposées dans la démonstration précédente appellent évidemment une remarque analogue à celle du numéro 68.

§ 5. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites.

70. Intégrales curvilignes. — Soient P et Q deux fonctions continues et uniformes de x et y dans une aire D à contour simple. L'intégrale curviligne

$$(1) \qquad \int_L P dx + Q dy,$$

effectuée sur une ligne L tracée dans l'aire D, a été définie au n° 12

sous forme élémentaire moyennant certaines restrictions imposées à L, mais elle l'a été dans le *t.* I (n° 357) pour toute courbe rectifiable. Les propositions suivantes s'appliquent à toute courbe rectifiable L pour laquelle l'intégrale curviligne a été définie.

La plupart des démonstrations se ramènent d'ailleurs au cas d'un contour polygonal en vertu de la proposition suivante :

71. Lemme. — *La ligne d'intégration* L *étant tracée dans l'aire* D, *on peut lui inscrire un polygone* Π *tel que l'intégrale sur* L *diffère aussi peu que l'on veut de l'intégrale sur* Π.

Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour chacune des intégrales de Pdx et de Qdy. Considérons donc seulement l'intégrale de Pdx, la démonstration se faisant de la même manière pour l'autre.

Soit aussi L la longueur de la ligne d'intégration, m_1 et M ses extrémités. Inscrivons un polygone ayant pour sommets les points $m_1, m_2, \ldots m_n$ et M. Soient x_i et P_i les valeurs de x et de P au point m_i ; c_i le côté $m_i\, m_{i+1}$ et aussi la longueur de ce côté. Soit ε un nombre positif arbitraire ; on peut prendre tous les côtés c_i assez petits pour que l'oscillation de la fonction continue P soit $< \varepsilon$ sur chaque côté et pour que la différence entre $\sum\limits_i (x_{i+1} - x_i)\, P_i$ et sa limite $\int_L Pdx$ soit aussi $< \varepsilon$. Ceci fait, on a

$$\int_\Pi Pdx = \sum_i \int_{c_i} Pdx,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_\Pi Pdx = \sum_i (x_{i+1} - x_i)\, P_i + \sum_i \int_{c_i} (P - P_i)\, dx.$$

Cette relation prouve le théorème, car, si l'on porte son attention sur le second membre, la première somme diffère de moins de ε de $\int_L Pdx$, tandis que la seconde, qui est moindre en valeur absolue que $\varepsilon \Sigma c_i$ et *a fortiori* que εL, est aussi petite que l'on veut avec ε.

72. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites. — En général, l'intégrale curviligne effectuée sur une ligne C, tracée dans le plan xy et allant du point (x_1, y_1) au point (X, Y), dépend non seulement de ces deux points, mais aussi du tracé de la ligne. Si l'intégrale ne dépend que des extrémités de la ligne d'intégration et du sens du parcours, il est naturel de faire apparaître cette propriété par

une notation analogue à celle des intégrales ordinaires : l'intégrale effectuée de (x_1, y_1) à (X, Y) sur une ligne arbitraire se désigne alors par

$$\int_{x_1 y_1}^{X, Y} Pdx + Qdy$$

et l'on dit que *l'intégrale curviligne ne dépend que de ses limites.*

73. Théorème I. — *Si* $Pdx + Qdy$ *est la différentielle totale d'une fonction* $F(x,y)$ *uniforme dans l'aire* D, *l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépend que de ses limites sur toute ligne de l'aire* D *et elle est égale à l'accroissement de* F *entre les extrémités de la ligne d'intégration.*

L'intégration sur une ligne quelconque étant la limite de l'intégrale sur une ligne polygonale en vertu du lemme précédent, il suffit de prouver le théorème pour toute ligne polygonale.

Or, sur une ligne polygonale Π, on peut considérer x et y comme des fonctions continues d'une variable t qui varie de t_1 à T, ces fonctions admettant des dérivées continues sauf aux sommets du polygone où elles restent toujours bornées. On peut alors prendre t comme variable d'intégration et il vient

$$\int_{\Pi} Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{T} \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{T} \frac{dF}{dt}\, dt.$$

Par conséquent, x_1, y_1 et X, Y étant les coordonnées des extrémités,

$$\int_{\Pi} Pdx + Qdy = F(X,Y) - F(x_1, y_1)$$

ce qui prouve la proposition.

74. Théorème. II. — *Quand elle ne dépend que de ses limites dans l'aire* D, *l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *effectuée entre un point fixe* x_1, y_1 *et un point variable* x, y *est une fonction uniforme de* x, y *ayant pour différentielle totale* $Pdx + Qdy$, *ou pour dérivées partielles* P *et* Q.

Désignons pour x_1, y_1 le point fixe, mais par X, Y le point variable. Soit alors

$$F(X,Y) = \int_{x_1 y_1}^{X,Y} Pdx + Qdy$$

l'intégrale effectuée entre ces deux points. Cette fonction F est uniforme par hypothèse ; il reste à montrer qu'elle a pour dérivées partielles P et Q.

Laissons Y fixe et donnons à X un accroissement infiniment petit $\Delta X = h$. Pour calculer la nouvelle intégrale, on peut choisir un polygone d'intégration ayant pour dernier côté la droite qui joint le point (X, Y) à (X + h, Y). L'accroissement ΔF se réduit alors à l'intégrale sur ce dernier côté, où y est constant et dy nul, c'est-à-dire à l'intégrale définie ordinaire

$$\Delta F = \int_X^{X+h} P(x, Y)\, dx.$$

On en déduit, par le théorème de la moyenne, $\Delta F = P(X + \theta h)\, \Delta X$ et, par conséquent,

$$F'_X = \lim \frac{\Delta F}{\Delta X} = P(X, Y); \qquad \text{de même,} \quad F'_Y = Q.$$

En rapprochant les deux théorèmes précédents, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante :

75. Théorème III. — *Si* P *et* Q *sont des fonctions continues de* x *et de* y *dans l'aire* D, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale curviligne de* $Pdx + Qdy$ *ne dépende que de ses limites dans l'intérieur de* D, *est que* $Pdx + Qdy$ *soit la différentielle totale d'une fonction uniforme dans cette aire.*

76. Théorème IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépende que de ses limites dans l'aire* D *est qu'elle soit nulle sur tout contour fermé* C *tracé dans* D. *Il suffit d'ailleurs pour cela qu'elle soit nulle sur tout contour triangulaire, et même sur tout contour triangulaire supposé aussi petit qu'on voudra.*

Soient L et L_1 deux lignes ayant les mêmes extrémités, L_1^{-1} la ligne L_1 parcourue en sens contraire. Le parcours LL_1^{-1} est fermé et l'on a

$$\int_L - \int_{L_1} = \int_{LL_1^{-1}}$$

Donc, si les intégrales sur L et sur L_1 sont égales, celle sur le contour fermé LL_1^{-1} est nulle et réciproquement, ce qui prouve la première partie du théorème.

Je dis maintenant que pour que l'intégrale soit nulle sur tout contour fermé, il suffit qu'elle le soit sur tout contour triangulaire. En effet, l'intégrale sur le contour fermé est la limite de celle sur un polygone fermé Π. Pour que l'intégrale soit nulle sur Π, il suffit qu'elle le soit sur tout contour triangulaire suffisamment petit. En effet, si le contour poly-

gonal Π est simple (ne se coupe pas), on peut par des lignes auxiliaires décomposer l'aire intérieure à Π en un réseau de triangles aussi petits qu'on le désire. Sommons les intégrales effectuées sur les contours de tous les triangles, les intégrales sur les lignes auxiliaires se détruisent car ces lignes sont parcourues deux fois en sens contraires. La somme se réduit donc à l'intégrale effectuée sur le contour polygonal extérieur. Celle-ci s'annule donc avec les intégrales sur les triangles.

Si le contour polygonal Π se coupe, il est formé par la juxtaposition de plusieurs contours simples et l'on est ramené au cas précédent.

77. Théorème V. — *Si* P *et* Q *et leurs dérivées partielles* P'_y *et* Q'_x *sont des fonctions continues et uniformes de* x *et* y *dans l'aire* D, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de* $Pdx + Qdy$ *ne dépende que de ses limites sur toute ligne tracée dans l'intérieur de* D *est que l'on ait l'identité* $P'_y = Q'_x$ *dans l'intérieur de l'aire* D.

Cette conclusion se tire d'abord immédiatement de la formule de Green. Il suffit, d'après le théorème précédent, de montrer que l'intégrale de $Pdx + Qdy$ est nulle sur tout triangle C tracé dans l'aire D. Soit A l'aire intérieure au triangle. Il vient, par la formule de Green, $Q'_x - P'_y$ étant nul,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int\int_A (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy = 0,$$

ce qui prouve la proposition.

Mais il est inutile de recourir à la formule de Green et nous allons donner une autre démonstration qui s'étend plus facilement à un nombre quelconque de variables. Il suffit de montrer que l'intégrale est nulle sur tout triangle suffisamment petit contenu dans une aire D' intérieure à D au sens étroit. Mais tout triangle suffisamment petit de D' tombe dans un rectangle correspondant R intérieur à D, dans lequel $Pdx + Qdy$ est, par conséquent, la différentielle totale d'une fonction uniforme $F(x, y)$ (nº 68). Donc l'intégrale ne dépend que de ses limites dans R (nº 75) ; par suite, elle est nulle sur un contour fermé (dont les extrémités coïncident) et, en particulier, sur le triangle.

78. Extension à un nombre quelconque de variables. — L'analyse précédente s'étend d'elle même à un nombre quelconque de variables indépendantes. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats pour trois variables :

Soient P, Q, R trois fonctions continues et uniformes de x, y, z, admettant des dérivées partielles premières continues dans un domaine D. Ce domaine D peut être limité par une ou plusieurs surfaces, mais on le suppose tel, que tout contour fermé qu'on y trace puisse se réduire à un point unique par une déformation continue sans sortir de D. (Dans le cas de deux variables, c'est la simplicité du contour de l'aire qui assurait cette condition).

On aura alors le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $P dx + Q dy + R dz$ *soit la différentielle totale d'une fonction uniforme* $F(x, y, z)$ *dans* D, *ou pour que l'intégrale curviligne*

$$\int P dx + Q dy + R dz$$

ne dépende que de ses limites dans D, *est que l'on ait, dans ce domaine,*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Dans ce cas, $F(x, y, z)$ sera exprimée, à une constante près, par l'intégrale curviligne

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} P dx + Q dy + R dz,$$

effectuée sur un chemin arbitraire entre un point fixe et un point variable du domaine D.

Exercices.

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de surface

$$(1) \qquad \iint_S A\, dy\, dz + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy$$

ne dépende que du contour L de la surface et non de la forme de celle-ci ?

R. Il faut que l'intégrale soit nulle sur toute surface fermée S. Soit V le volume compris dans S supposée fermée ; l'intégrale de surface revient par la formule de Green à l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Cette intégrale devant s'annuler quel que soit V, la condition cherchée est

$$(2) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

2. Montrer que si l'intégrale de surface (**1**) ne dépend que du contour L de S, elle se ramène à une intégrale curviligne sur L.

R. La condition (**2**) ayant lieu, il est possible de déterminer trois fonctions P, Q, R par les relations

$$\frac{\partial R}{dy} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

On y satisfait, par exemple, en posant

$$P = \int_{z_0}^{z} B dz - \int C(x, y, z_0)\, dy, \qquad Q = -\int_{z_0}^{z} A dz, \qquad R = 0.$$

L'intégrale de surface se transforme alors par la formule de Stokes (n° 38) dans l'intégrale curviligne

$$\text{(3)} \qquad \int_L P dx + Q dy + R dz.$$

Ce résultat permet de généraliser la notion des différentielles exactes. On dit (Poincaré) que l'équation (**2**) exprime la condition pour que (**1**) soit une intégrale de différentielle exacte. Dans ce cas, en effet, l'intégrale *double* (**1**) se ramène à l'intégrale *simple* (**3**). Cette généralisation peut s'étendre à un nombre quelconque de variables.

CHAPITRE III.

Intégrales multiples de Riemann et de Lebesgue.

---

§ 1. Intégrales multiples de Riemann.

79. Domaine rectangulaire à n dimensions. — Soit $x, y, \ldots$ un système de n variables indépendantes qui peuvent prendre respectivement toutes les valeurs comprises dans les intervalles (a, A), $(b, B), \ldots$ et ces valeurs extrêmes. Leur domaine de variation se représente géométriquement par un rectangle dans le cas de deux variables, par un prisme rectangulaire dans le cas de trois. Mais, au delà, la représentation géométrique fait défaut. Cependant nous dirons encore, par analogie, que les variables varient dans un *domaine prismatique rectangulaire* ou, en abrégé, dans un *domaine rectangulaire*.

Tout système de valeurs $x, y, \ldots$ comprises dans les limites précédentes est un *point* du domaine ; chacune des quantités $x, y, \ldots$ est une *coordonnée* de ce point. Les différences $A - a$, $B - b, \ldots$ sont les *dimensions* du domaine rectangulaire. L'*étendue* R du domaine est, par définition, égale au produit $(A - a)(B - b)\ldots$ de toutes ses dimensions.

80. Théorème de M. Darboux. — Soient $x, y, \ldots$ des variables dans le domaine rectangulaire R étendu aux intervalles (a, A) de x, (b, B) de $y, \ldots$ Décomposons chacun de ces intervalles en éléments consécutifs par des points intermédiaires. Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots$ les éléments de l'intervalle (a, A), $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ceux de (b, B), etc. Le domaine R sera décomposé, en même temps, en éléments $\rho_1, \rho_2, \ldots$ chaque domaine ρ ne comprenant qu'un seul intervalle élémentaire pour chaque variable.

Soient $f(x, y, \ldots)$ une fonction bornée de $x, y, \ldots$, M et m ses bornes supérieure et inférieure dans R, M_n et m_n ses bornes analogues dans ρ_n. Formons les deux sommes étendues à tous les éléments ρ_n de R :

$$S = \Sigma M_n \rho_n, \qquad s = \Sigma m_n \rho_n.$$

Voici le théorème de M. Darboux [1] :

Si l'on fait décroître indéfiniment tous les intervalles $\delta_i, \gamma_k, \ldots$ les deux sommes S et s tendront respectivement vers des limites bien déterminées L *et* l, *indépendantes du choix des points de subdivision dans chaque intervalle* (a, A), (b, B), *etc.*

[1] *t.* I, nº 253 dans le cas d'une seule variable.

Il suffit évidemment de faire la démonstration pour S, car S est remplacé par $-s$ quand f est remplacé par $-f$. Ensuite on peut supposer $f > 0$, car le théorème sera vrai de f, s'il l'est de $f + A$, A désignant une constante ; et on peut prendre cette constante assez grande pour que $f + A$ soit > 0.

Dans cette hypothèse, on peut faire l'observation préliminaire suivante : Si l'on partage un élément ρ_n en plusieurs autres, ρ', ρ'',... où f a pour bornes supérieures M', M'',... le produit $M_n \rho_n$ surpassera la somme $M'\rho' + M''\rho'' + \dots$ étendue à tous les éléments de ρ_n et *a fortiori* (puisque les termes sont positifs) toute somme analogue qui ne s'étendrait qu'à une partie seulement des éléments de ρ_n.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème de M. Darboux pour S.

La somme S ne peut être inférieure à mR ; elle admet donc une limite inférieure L, *je dis que* S *a pour limite* L *quand tous les éléments* ρ_n *tendent vers* 0 *dans tous les sens.*

En effet, soit ε un nombre positif arbitraire; par définition de L, on peut trouver une somme $S' < L + \varepsilon$ et cette somme sera fournie par un mode de partage de R en éléments déterminés ρ'_1, ρ'_2,...

Ceci fait, pour prouver que S tend vers L, il suffit de montrer que S (qui est $\geq L$) devient inférieur à $L + \varepsilon$ quand les éléments ρ_n tendent vers 0.

Or on peut partager les éléments ρ_n en deux classes : ceux qui sont intérieurs à un élément ρ'; ceux qui empiètent sur plusieurs éléments ρ'. En même temps, S est décomposé en deux parties correspondantes $S_1 + S_2$. La somme S_1 relative aux éléments de la première classe est $< S'$, car, par notre observation préliminaire, chaque terme de S' est remplacé dans S_1 par une somme de termes qui est moindre. La somme S_2 tend vers zéro, parce que la somme des éléments ρ_n de la deuxième classe tend évidemment vers zéro. Donc S qui s'approche indéfiniment de S_1 (qui est $< S'$) devient aussi $< L + \varepsilon$.

La proposition est établie.

On prouve, par réduction à la démonstration précédente (voir plus haut), que *la somme s tend vers la limite supérieure l.*

81. Intégrales par excès et par défaut. Fonctions intégrables (R) ; leurs propriétés. — La limite L s'appelle l'*intégrale par excès* de f dans le domaine R, la limite l son *intégrale par défaut* (Jordan). Nous les représenterons par

$$(1)\quad \begin{cases} L = \overline{\int_R} f(x, y, \dots)\, dR & \text{ou} \quad \overline{\int_R} f(x, y, \dots)\, dx\, dy \dots \\ l = \underline{\int_R} f(x, y, \dots)\, dR & \text{ou} \quad \underline{\int_R} f(x, y, \dots)\, dx\, dy \dots \end{cases}$$

L'*ordre de multiplicité* de l'intégrale est égal au nombre des dimen-

sions du domaine R, donc au nombre des variables x, y... ou des différentielles dx, dy...

Quand on le peut sans difficulté, on remplace, dans la notation de l'intégrale, le signe $\int$ unique des formules (1) par des signes superposés en nombre égal à l'ordre de multiplicité de l'intégrale.

Pour que la fonction f soit *intégrable au sens de Riemann* ou *intégrable* (R), il faut que les limites l et L soient égales. Leur valeur commune I s'appelle l'*intégrale* de f dans R et l'on écrit simplement

$$(2) \qquad I = \int_R f(x, y, \ldots)\, dR = \int_R f(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots$$

Si la fonction f n'est pas intégrable (R), nous ne considérerons pas cependant l'intégrale de f dans R ou l'expression (2) comme dépourvue de toute signification. Nous lui attribuerons une valeur indéterminée, mais comprise entre les intégrales par excès et par défaut.

Les propriétés des fonctions intégrables d'une variable (*t.* I, n° 256) se généralisent aisément. Ainsi :

Les sommes et produits de fonctions intégrables (R) *sont intégrables* (R). *De plus, l'intégrale d'une somme sera égale à la somme des intégrales de chaque terme.*

Le quotient de deux fonctions intégrables est intégrable (R), *pourvu que la fonction prise comme diviseur ait ses bornes supérieure et inférieure de même signe.*

82. Expression de la différence entre les intégrales par excès et par défaut. — Désignons par Osc $f(x_0, y_0, \ldots)$ l'*oscillation* de la fonction f au point $x_0, y_0, \ldots$ c'est-à-dire la limite de l'oscillation de f dans le domaine limité aux intervalles $x_0 \pm \varepsilon$, $y_0 \pm \eta, \ldots$ quand $\varepsilon, \eta, \ldots$ tendent vers 0. Le lemme du n° 258 du premier volume se généralise immédiatement comme il suit :

Quelque petit que soit le nombre positif donné ε, on peut décomposer le domaine rectangulaire R *en éléments rectangulaires ρ_n aussi petits qu'on veut et tels qu'on ait dans chacun d'eux.*

$$M_n - m_n < \Delta_n + \varepsilon,$$

où $M_n - m_n$ est l'oscillation de f dans le domaine ρ_n et Δ_n le maximum de l'oscillation de f pour les divers points de ce domaine.

Par conséquent, la formule du même n° 258 qui exprime par une intégrale la différence entre les intégrales par excès et par défaut se généralise aussi. On a

$$(3) \qquad \overline{\int_R} f\, dR - \underline{\int_R} f\, dR = \overline{\int_R} (\text{Osc.} f)\, dR.$$

83. Réduction des intégrales doubles à des intégrales simples. — *Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables, intégrable (R) dans un rectangle R borné par les valeurs a et A de x, b et B de y. L'intégrale double*

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$$

est réductible à deux intégrales simples effectuées consécutivement par rapport à chaque variable entre les limites du domaine.

Décomposons l'intervalle (a, A) en m parties consécutives $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ par les points $x_1 = a, x_2, \ldots x_{m+1} = A$; l'intervalle (b, B) en n parties consécutives $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ par les points $y_1 = b, y_2, \ldots y_{n+1} = B$. Le domaine R sera partagé en mn rectangles ayant respectivement pour étendues les produits $\delta_i\gamma_k$.

On a, par décomposition de deux intégrales simples consécutives :

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx,$$

Désignons par M_{ik} et m_{ik} les bornes supérieure et inférieure de f dans le rectangle $\delta_i\gamma_k$. Dans le terme général de la somme écrite au second membre de l'équation précédente, f reste compris entre M_{ik} et m_{ik}. On a donc

$$M_{ik}\delta_i\gamma_k \geqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} dx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx \geqslant m_{ik}\delta_i\gamma_k.$$

Il vient donc, en additionnant toutes les inégalités analogues,

$$\sum\sum M_{ik}\delta_i\gamma_k \geqslant \int_b^B dy \overline{\int_a^A} f(x, y)\,dx \geqslant \sum\sum m_{ik}\delta_i\gamma_k.$$

Faisons tendre tous les δ_i et tous les γ_k vers zéro ; les deux membres extrêmes tendent, par hypothèse, vers l'intégrale double supposée déterminée. Il vient donc

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^B dy \int_b^A f(x, y)\,dx.$$

On a aussi, par un raisonnement analogue,

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dz = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx.$$

Mais, d'après la définition donnée dans le premier volume (n° 255) de l'intégrale d'une fonction présentant des points d'indétermination partielle, les seconds membres des deux équations précédentes comprennent entre eux et, par conséquent, égalent tous deux l'intégrale bien déterminée

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx.$$

Enfin, comme on peut permuter x et y dans les raisonnements précédents, on obtient le théorème suivant :

84. Théorème. — *Si la fonction $f(x, y)$ est intégrable* (R) *dans le rectangle* R, *les deux intégrales simples*

$$\int_a^A f(x, y)\, dx, \qquad \int_b^B f(x, y)\, dy,$$

sont respectivement des fonctions intégrables (R) *de y dans l'intervalle* (b, B) *et de x dans l'intervalle* (a, A) ; *et l'on a*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy.$$

85. Réduction des intégrales triples et multiples. — Un raisonnement semblable s'applique aux intégrales triples. Si la fonction $f(x, y, z)$ est intégrable dans le domaine qui comprend les intervalles (a, A) de x, (b, B) de y, (c, C) de z. L'intégrale triple se ramène à trois intégrales simples consécutives effectuées par rapport à chaque variable entre ces limites, et cela dans un ordre arbitraire. En particulier, on peut intégrer successivement par rapport à x, y et z, ce qui donne

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dy = \int_c^C dz \int_b^B dy \int_a^A f(x, y, z)\, dz.$$

86. Etendue d'un ensemble. Théorèmes divers. — Les premières définitions relatives aux ensembles de points ont été données dans l'introduction (*t.* I, nos 59 et suiv.). Soit E un ensemble borné et intérieur à un domaine rectangulaire R d'ailleurs arbitraire. Désignons par $e(x,y,..)$ une fonction égale à 1 en tout point de E et à zéro en tout autre point. Formons les deux intégrales

$$(4) \qquad \overline{\int}_R e(x, y,\ldots)\, dx\, dy,\ldots \qquad \underline{\int}_R e(x, y,\ldots)\, dx\, dy\ldots$$

La première est, par définition, l'*étendue extérieure*, la seconde l'*étendue* intérieure de E *au sens de M. Jordan*. Quand elles sont égales, l'ensemble E est mesurable (J) et a pour *étendue*

$$E = \int_R e(x, y,\ldots)\, dx\, dy\ldots$$

Appliquons à ces intégrales la relation (3) du no 82 et remarquons encore que Osc $f(x, y,\ldots) = 1$ en tout point frontière de E et $= 0$ en tout autre point. Nous obtenons les deux théorèmes suivants :

I. *La différence entre les étendues intérieure et extérieure* (J) *d'un ensemble est égale à l'étendue extérieure de sa frontière.*

II. *Pour qu'un ensemble soit mesurable* (J), *il faut et il suffit que l'étendue de sa frontière soit nulle.*

Soient (a, A), (b, B),... les intervalles qui définissent R. Décomposons-les respectivement en parties consécutives δ_i, γ_k,... et, par suite, R en éléments $\rho_n = \delta_i \gamma_k \dots$ indéfiniment décroissants. Rappelons-nous alors la signification des intégrales (**4**), nous obtenons le théorème suivant :

III. *L'étendue intérieure de* E *est la limite de la somme des éléments* ρ_n *contenus dans* E, *l'étendue extérieure celle de la somme des éléments* ρ_n *contenant un point au moins de* E.

Décomposer un ensemble en plusieurs autres, c'est partager ses points en plusieurs catégories, chaque catégorie de points formant alors un ensemble partiel. On a le théorème suivant :

IV. *Si l'on décompose un ensemble* E *borné et mesurable* (J) *en plusieurs autres* E', E'',... *également mesurables, l'étendue de* E *sera la somme de celles des parties.*

Soient, en effet, e une fonction égale à 1 en tout point de E et à O partout ailleurs, e', e'',... les fonctions analogues relativement à E', E'',... On a $e = e' + e'' + \cdots$ Intégrons cette relation dans un domaine rectangulaire R contenant E ; l'intégrale du second membre peut se décomposer et il vient $\mathrm{E} = \mathrm{E}' + \mathrm{E}'' + \cdots$

87. Intégrales étendues à un ensemble mesurable (J). — Soit E un ensemble compris dans un domaine rectangulaire (R) et $f(x, y\dots)$ une fonction bornée dans cet ensemble. Désignons par f_1 une fonction égale à f en tout point de E et à zéro en tout autre point, les intégrales par excès et par défaut de f dans E se désignent par

$$\overline{\int_{\mathrm{E}}} f\,dx\,dy\dots \qquad \underline{\int_{\mathrm{E}}} f\,dx\,dy\dots$$

Elles sont égales, par définition, aux intégrales correspondantes de f_1 dans R :

$$\overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1\,dx\,dy\dots \qquad \underline{\int_{\mathrm{R}}} f_1\,dx\,dy\dots$$

Si celles-ci sont égales, f est intégrable (R) dans l'ensemble E.

Le cas où E n'est pas mesurable (J) est dénué d'intérêt. Nous allons donc supposer que cet ensemble est mesurable (J) et a pour mesure E. Une fonction f possède alors les propriétés suivantes :

I. *Si l'on désigne par* M *et* m *les bornes supérieure et inférieure de* f *dans* E, *les intégrales par excès et par défaut de* f *dans* E *seront comprises entre* ME *et* mE.

Soit, en effet, $e(x, y,\dots)$ la fonction égale à 1 dans E et a O en dehors ; on a $\mathrm{M}e \geqslant f_1 \geqslant me$, d'où

$$\overline{\int_{\mathrm{R}}} f_1\,dx\,dy\dots \leqslant \mathrm{M}\int_{\mathrm{R}} e\,dx\,dy\dots = \mathrm{ME}$$

et l'on voit, de même, que l'intégrale par défaut est $\geqslant m\mathrm{E}$.

Ce théorème porte le nom de *théorème de la moyenne.*

II. *Si f est intégrable* (R) *et si l'on décompose l'ensemble* E *en plusieurs autres également mesurables* E′, E″,... *l'intégrale de f dans* E *sera la somme des intégrales dans* E′, E″,...

Définissons les fonctions f_1', f_1'',... par rapport à E′, E″, .. comme f_1 l'est par rapport à E; on a $f_1 = f_1' + f_1'' + \cdots$; et en intégrant cette relation terme à terme (nº 81) dans le rectangle R, on trouve, par définition, la relation à démontrer.

88. Généralisation de la définition de l'intégrale. — *Si l'on décompose un ensemble mesurable* E *en un nombre indéfiniment croissant d'ensembles mesurables* $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ *dont les diamètres tendent vers* 0 *et qu'on désigne par* M_i et m_i *les bornes supérieure et inférieure de f dans* ρ_i, *les deux sommes* $\Sigma\, \mathrm{M}_i \rho_i$ et $\Sigma\, m_i \rho_i$ *ont pour limites respectives les intégrales par excès et par défaut de f dans* E *(donc l'intégrale de f, si f est intégrable).*

Il n'y a qu'à reproduire la démonstration du théorème de M. Darboux (nº 80) en substituant une subdivision quelconque à celle en éléments rectangulaires. La démonstration subsiste, parce que les frontières des ensembles mesurables sont d'étendue nulle et que, par conséquent, si elles sont comprises à l'intérieur d'un système d'élément ρ_n de diamètres infiniment petits, la somme de ces éléments tend vers zéro.

§ 2. Mesures des ensembles à plusieurs dimensions d'après MM. Borel et Lebesgue. Fonctions mesurables.

L'étude de la mesure des ensembles linéaires a été faite d'une manière approfondie dans le premier volume (Chap. VI, § 5). L'extension aux ensembles à plusieurs dimensions est si naturelle qu'il suffira d'énoncer les résultats sans revenir sur les démonstrations.

89. Mesures intérieure et extérieure d'un ensemble. Ensembles mesurables. — Soit E un ensemble borné et compris dans un domaine rectangulaire R dont nous désignerons aussi la mesure par R (nº 79). On peut enfermer ses points dans une infinité dénombrable de domaines rectangulaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Soit $\Sigma\alpha$ la somme des mesures de ces domaines. Par définition, la *mesure extérieure*, $m_e\,\mathrm{E}$, est la borne inférieure de toutes les sommes $\Sigma\alpha$ possibles.

Soit maintenant CE le complémentaire de E (relativement à R) et $m_e\,(\mathrm{CE})$ la mesure extérieure de cet ensemble. La *mesure intérieure* de E est la différence, nulle ou positive, mais $\leqslant m_e\,\mathrm{E}$,

$$m_i\,\mathrm{E} = \mathrm{R} - m_e\,(\mathrm{CE}).$$

Lorsque les mesures intérieure et extérieure de E sont égales, cet ensemble est *mesurable* (au sens de MM. Borel et Lebesgue) et la mesure, mE, de l'ensemble est la valeur commune de m_iE et m_eE.

90. Opérations sur les ensembles. Leurs propriétés. — Étant donnés des ensembles E_1, E_2,... les trois opérations

$$E_1 + E_2 + \cdots, \qquad E_1 - E_2, \qquad E_1 E_2 \cdots,$$

déjà définies (*t.* I, nº 266), consistent respectivement : à réunir les points qui appartiennent aux ensembles E_1, E_2,... ; à retrancher de E_1 les points de E_2 ; à prendre les points communs à tous les ensembles E_1, E_2...

Si les ensembles E_1, E_2,... sont mesurables, sans points communs et compris dans un même domaine rectangulaire R, les opérations précédentes fournissent encore des ensembles mesurables.

On a, en particulier (*t.* I, nº 267) :

$$m(E_1 + E_2 + \ldots) = m\,E_1 + m\,E_2 + \cdots$$

Si, de plus, E_2 est contenu dans E_1,

$$m(E_1 - E_2) = m\,E_1 - m\,E_2.$$

Les ensembles que l'on peut construire à l'aide d'une série dénombrable de ces opérations en partant de domaines rectangulaires, sont les *ensembles mesurables* (B), les seuls considérés par M. Borel.

Les *ensembles limites* (complets ou restreints) d'une infinité dénombrable d'ensembles E_1, E_2... se définissent comme dans le tome Ier (nº 270). Ils sont mesurables quand ceux de la suite sont tous mesurables. Il y a lieu, à leur sujet, de rappeler le théorème suivant :

Théorème. — *Si parmi les ensembles* E_1, E_2,... *compris dans* R, *il y en a une infinité de mesures intérieures* $\geqslant k$, *l'ensemble limite complet aura une mesure intérieure* $\geqslant k$. — *S'il y en a une infinité de mesures extérieures* $\leqslant k$, *l'ensemble limite restreint aura une mesure extérieure* $\leqslant k$.

On en déduit, comme au nº 271 du tome I, le théorème suivant :

Application a la convergence. — *Soit* $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ *une suite de fonctions de* $x, y\ldots$ *convergeant vers une limite finie* $f(x, y)$ *dans un ensemble* E ; *soit ensuite* ε *un nombre positif arbitraire et* E_n *l'ensemble des points de* E *où l'on a* $|f - f_n| \geqslant \varepsilon$. *A tout nombre positif* δ *si petit qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre* N *tel que l'on ait*

$$m_e E_n < \delta, \text{ si } n \geqslant N.$$

91. Ensembles fermés. — Considérons, pour fixer les idées, un *ensemble superficiel*, c'est-à-dire un ensemble de points dans un plan. Soient E cet ensemble fermé et borné (par conséquent, compris dans un rectangle R) et CE son complémentaire.

Tout point donné de CE, étant à distance finie de E qui est fermé, tombe à l'intérieur d'un carré formé exclusivement de points de CE. Il s'ensuit que l'on peut considérer CE comme formé par la réunion d'une infinité dénombrable de carrés n'empiétant pas.

L'ensemble fermé E s'obtient donc en retranchant de R les points qui appartiennent à une infinité dénombrable de carrés. Donc *un ensemble fermé est mesurable* (B).

Une conséquence à tirer de là et qui mérite d'être remarquée est la suivante :

Un ensemble fermé qui est de mesure nulle (B) *est aussi d'étendue nulle* (J).

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ les carrés (et aussi les mesures des carrés) n'empiétant pas qui constituent CE. La somme de ces carrés est égale à CE, donc à R, puisque E est de mesure nulle (B). Couvrons R d'un réseau à mailles rectangulaires infiniment petites : la somme des mailles qui tombent dans les n carrés finis $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ a pour limite

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Cette somme diffère aussi peu qu'on veut de R. Donc R est aussi l'étendue (J) de CE; et, par conséquent, celle de E est nulle.

Si l'on envisageait des ensembles à trois ou à un plus grand nombre de dimensions, il faudrait, dans ce qui précède, remplacer les carrés par des cubes et ainsi de suite. D'autre part, le théorème est encore vrai pour les ensembles linéaires. Il est donc général.

92. Fonctions mesurables. — Les fonctions $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables sont mesurables dans les mêmes conditions que celles d'une seule variable (*t.* I, n° 272). La fonction f sera *mesurable* dans un ensemble E de points $(x, y, \ldots)$, si l'ensemble

$$E(f > A)$$

des points de E où f est $> A$ est un ensemble mesurable.

S'il n'y a qu'une variable, la fonction est mesurable *linéairement*; elle est mesurable *superficiellement* s'il y en a deux.

Les sommes, produits, quotients de fonctions mesurables sont mesurables comme dans le cas d'une variable. De même, *toute limite de fontions mesurables est mesurable* (*t.* I, n° 273).

Plus généralement, *toute plus grande (plus petite) limite* Φ *d'une suite* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ de fonctions mesurables est mesurable.

Pour le prouver, il faut établir que l'ensemble $E(\Phi > A)$ est mesurable. Soit ε un nombre positif, E_n l'ensemble $E(\varphi_n > A + \varepsilon)$. L'ensemble limite restreint de la suite $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ est formé des points de l'ensemble $E(\Phi > A + \varepsilon)$ et, peut être, de points de $E(\Phi = A + \varepsilon)$. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ une suite de valeurs de ε tendant vers 0; on voit que l'ensemble $E(\Phi > A)$ est l'ensemble limite de la suite $E_{\varepsilon_1}, E_{\varepsilon_2}, \ldots$ Donc, il est mesurable.

Les fonctions continues, les fonctions intégrables au sens de Riemann, les dérivées et les nombres dérivés de fonctions continues sont des fonctions mesurables B (*t.* I, n° 274).

93. Propriété générale des fonctions mesurables. — *Si la fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est mesurable et bornée dans un ensemble borné* E, *alors, quels que soient les deux nombres positifs* ε *et* ω, *on peut définir une fonction continue,* φ, *égale à* f *à moins de* ε *près dans* E, *abstraction faite des points de* E *appartenant à un ensemble de mesure* $< \omega$.

Comme la démonstration se fait par analogie dans les autres cas, nous considérons une fonction d'une seule variable x. Nous admettons que l'ensemble E est un intervalle, les autres cas se ramenant à celui-là par la définition d'une fonction auxiliaire égale à f dans E et à zéro en dehors. Nous supposons encore f positif, toute fonction mesurable étant la différence de deux fonctions mesurables positives.

Démontrons donc le théorème pour une fonction positive et bornée dans un intervalle (a, b). Partageons l'intervalle de variation de cette fonction par une échelle

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots \quad k\varepsilon, \ldots \quad n\varepsilon.$$

Soit ψ_k une fonction égale à $k\varepsilon$ dans l'ensemble contenu dans (a, b)

$$e_k = \mathrm{E}\,[k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon],$$

et égale à zéro dans son complémentaire ; la fonction

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_{n-1}$$

sera égale à f à moins de ε près. Il suffit donc de montrer que l'on peut définir une fonction continue égale à ψ, sauf dans un ensemble de mesure $< \omega$. Pour cela, il suffit de définir en général une fonction continue égale à ψ_k, sauf dans un ensemble de mesure $< \dfrac{\omega}{n}$.

A cet effet, enfermons e_k dans un ensemble dénombrable d'intervalles α n'empiétant pas, de mesure $< e_k + \dfrac{\omega}{3n}$. Soit A_k l'ensemble d'un nombre limité de ces intervalles tel que la somme des intervalles négligés soit $< \dfrac{\omega}{3n}$. Définissons une fonction φ_k égale à $k\varepsilon$ dans A_k et à zéro en dehors. Cette fonction sera égale à ψ_k sauf dans un ensemble de mesure $< \dfrac{2\omega}{3n}$, mais elle sera discontinue en un nombre limité de points : elle sautera brusquement à zéro aux extrémités des intervalles α employés. Pour faire disparaître ces sauts, raccordons la fonction à zéro par des segments de droites inclinées de manière que les modifications de φ ne s'étendent que sur des intervalles de somme $< \dfrac{\omega}{3n}$. La fonction φ_k ainsi

modifiée sera continue et ne différera de ψ_k que dans un ensemble de mesure $< \omega : n$, ce qui prouve le théorème.

On peut observer que la fonction continue φ à laquelle on aboutit par la construction précédente est l'ordonnée d'une ligne polygonale.

Remarque. — Réciproquement, *toute fonction f qui possède la propriété indiquée dans le théorème, sera mesurable.* En effet, soit φ_1, φ_2,... φ_n,... la suite des fonctions φ, continues (donc mesurables), qui correspondent à une suite de couples de nombres $(\varepsilon_1, \omega_1)$, $(\varepsilon_2, \omega_2)$,... tendant vers zéro. La plus grande limite Φ des fonctions φ est mesurable (nº 92) et ne diffère de f que dans un ensemble de mesure nulle. Donc f est mesurable.

§ 3. Intégrales multiples de Lebesgue. Fonctions sommables.

94. Intégrales de fonctions bornées. — Elles se définissent comme les intégrales simples, sans qu'il faille changer les démonstrations (*t.* I, nº 275).

Soient x, y,... les coordonnées d'un point P dans un espace à plusieurs dimensions, $f(x, y,...)$ ou, en abrégé, $f(P)$ une fonction bornée et mesurable dans un ensemble borné E. Soient ensuite μ et M les bornes inférieure et supérieure de f, A et B deux nombres fixes, l'un $A \leqslant \mu$, l'autre $B > M$. Décomposons l'intervalle (A, B) par les points intermédiaires t_1, t_2,... t_{n-1} et posons $t_0 = A$, $t_n = B$. Désignons par e_i la mesure de l'ensemble E $(t_{i-1} \leqslant f < t_i)$ contenu dans E. Enfin formons les deux sommes

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i t_i, \qquad s = \sum_{i=1}^{n} e_i t_{i-1}.$$

Ces deux sommes tendent vers une limite commune, indépendante du mode de subdivision, quand tous les intervalles $t_i - t_{i-1}$ tendent vers 0. Cette limite est l'intégrale de Lebesgue et nous la désignerons, avec lui, par la notation

$$\int_E f(P)\, dP.$$

Le nombre des dimensions de E (ou celui des coordonnées x, y,... du point P) est l'*ordre de multiplicité* de l'intégrale.

Cette intégrale jouit des propriétés suivantes :

I. *Si* E *est une somme d'ensembles mesurables* E_1, E_2,... *sans points communs, l'intégrale dans* E *est la somme de celles dans* E_1, E_2,...

On exprime cette propriété en disant que *l'intégrale est une fonction additive.*

II. *Si f est une somme de fonctions mesurables f_1, f_2,... l'intégrale de f est la somme de celles de f_1, f_2,...*

III. *Si f est mesurable dans* E *et borné par les nombres* μ *et* M, *l'intégrale de f dans* E *est comprise entre* μ $(m\text{E})$ *et* M $(m\text{E})$. (Théorème de la moyenne).

IV. *Si l'on désigne par e une portion quelconque de l'ensemble* E *précédent, l'intégrale de f dans e tend vers* 0 *avec la mesure de e.*

On exprime cette propriété en disant que l'*intégrale est une fonction absolument continue* (Vitali).

V. *Si la suite des fonctions mesurables $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ bornées dans leur ensemble, tend vers une limite f, l'intégrale de f est la limite de celle de f_n quand n tend vers l'infini.*

95. Intégrales de fonctions non bornées. Fonctions sommables. — 1°) Soit d'abord f une fonction non négative. Supposons-la mesurable, mais non bornée, dans l'ensemble mesurable et borné E. Définissons la fonction f_n comme égale à f en tout point où f ne surpasse pas le nombre positif n, mais égale à n si f est $\geqslant n$. L'intégrale de f dans E est, par définition, la limite finie ou infinie de celle de f_n quand n tend vers l'infini.

Si cette intégrale est finie, la fonction f est *sommable* dans l'ensemble E [1].

Si la fonction f n'est pas sommable, son intégrale dans E est infinie positive.

Si la fonction f est finie, ou n'est infinie que dans un ensemble de mesure nulle, on voit immédiatement que l'on ne change pas la définition de l'intégrale si l'on pose $f_n = 0$ (au lieu de $f_n = n$) quand f est $\geqslant n$. Mais la première définition a l'avantage de conserver un sens acceptable même quand f est infinie dans un ensemble de mesure non nulle.

Nous avons supposé jusqu'ici l'ensemble E borné. S'il n'est pas borné, il sera mesurable si l'ensemble de ses points dont les coordonnées restent inférieures à un nombre fixe est mesurable quel que soit ce nombre. Dans ce cas, l'intégrale de f dans E est la limite finie ou infinie de l'intégrale de f dans un ensemble borné et mesurable qui embrasse successivement tous les points de E. Si cette limite est finie, la fonction est dite *sommable* dans l'ensemble non borné E.

Ces définitions s'étendent aux fonctions non bornées et non positives par un simple changement de signe.

2°) Considérons maintenant une fonction f de signe quelconque ; c'est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions non négatives, en posant $f_1 = f$ et $f_2 = 0$ quand f est $\geqslant 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = -f$ quand f est $\leqslant 0$.

La fonction f sera dite *sommable* dans l'ensemble E, borné ou non,

[1] Dans le *t.* I (n° 278), suivant en cela M. Lebesgue, nous n'avons appelé *sommables* que les fonctions finies. L'extension de la définition que nous adoptons ici nous paraît présenter plus d'avantages que d'inconvénients.

si f_1 et f_2 sont tous deux sommables dans E et alors l'intégrale de f est, par définition, la différence de celles de f_1 et de f_2 (1).

Si la fonction f n'est pas la différence de deux fonctions sommables, nous ne lui attribuons aucune intégrale.

Remarques. — Un simple passage à la limite montre immédiatement que les propriétés I, II, du n° précédent subsistent pour les intégrales de fonctions sommables.

La propriété IV de l'*absolue continuité* s'étend aussi aux intégrales de fonctions sommables. Il suffit de le prouver pour une fonction positive. Soit ε un nombre positif arbitraire. Puisque f est sommable dans E, on peut prendre n assez grand pour que, f_n étant défini comme ci-dessus, on ait

$$\int_E f(P)\,dP < \int_E f_n(P)\,dP + \varepsilon.$$

Dans ce cas, on a *a fortiori*, dans toute portion e de E,

$$\int_e f(P)\,dP < \int_e f_n(P)\,dP + \varepsilon.$$

Donc, l'intégrale de la fonction bornée f_n étant absolument continue, le premier terme du second membre tend vers 0 avec me, ce qui exige, ε étant arbitraire, que le premier membre tende aussi vers 0.

§ 4. L'intégrale indéfinie. — Sa dérivée.

96. Fonctions d'ensemble mesurable. — Soit $f(P)$ une fonction sommable dans un ensemble donné E, soit ensuite e un ensemble variable quelconque, mais toujours mesurable, et Ee l'ensemble commun aux deux précédents. Nous pouvons poser

$$F(e) = \int_{Ee} f(P)\,dP,$$

car la considération de cette intégrale attache un nombre $F(e)$ à l'ensemble e. Cette correspondance définit ce que M. Lebesgue appelle une *fonction d'ensemble mesurable.*

Lorsque la fonction f n'est définie que dans l'ensemble E, nous conviendrons de définir f partout ailleurs en lui attribuant la valeur 0. Avec cette convention, l'intégrale considérée ci-dessus s'écrit plus simplement

$$F(e) = \int_e f(P)\,dP.$$

La fonction d'ensemble, $F(e)$, que l'intégration permet d'attacher ainsi à une fonction f est l'*intégrale indéfinie de f* (Lebesgue).

(1) Cette définition est équivalente à celle donnée dans le t. I quand f est finie.

Cette fonction d'ensemble jouit de deux propriétés essentielles que nous lui avons reconnues dans le § précédent :

1° *Elle est absolument continue*, c'est-à-dire que $F(e)$ est infiniment petit en même temps que me (mesure de e).

2° *Elle est additive*, c'est-à-dire que, étant donnée une suite finie ou illimitée $e_1, e_2, \dots$ d'ensembles sans point commun, on a

$$F(e_1) + F(e_2) + \cdots = F(e_1 + e_2 + \cdots)$$

La conclusion du paragraphe actuel sera d'établir que ces deux propriétés des intégrales définies *les caractérisent.*

La théorie que nous allons exposer s'applique à des ensembles de toutes dimensions [1]. Mais, pour fixer les idées, nous raisonnerons dans les démonstrations sur des ensembles à deux dimensions, l'extension au cas général étant immédiate.

97. Dérivée (au sens resteint) d'une fonction d'ensemble additive et absolument continue. — Une fonction d'ensemble (superficiel) $F(e)$ étant donnée, nous appellerons *dérivée* de cette fonction en un point P la limite, si elle existe, du rapport $F(\gamma) : m(\gamma)$ de $F(\gamma)$ à la mesure d'un cercle γ de centre P dont le rayon tend vers 0. Lorsque cette limite n'existe pas, les plus grande et plus petite limite du rapport sont les *nombres dérivés supérieur* et *inférieur* de F au point P. Nous les représenterons par $\overline{D}F$ et $\underline{D}F$ respectivement. L'un ou l'autre sera aussi représenté par DF s'il n'y a pas lieu de les distinguer.

Ces nombres dérivés sont mesurables. En effet, considérons, pour fixer les idées, un nombre dérivé supérieur. Soit $\varphi(P, \alpha, \beta)$ le minimum du rapport $F(\gamma) : m\gamma$ quand le cercle γ de centre P a son rayon compris entre α et β. C'est une fonction continue de α et β, et le nombre dérivé est sa limite quand α d'abord et β ensuite tendent vers 0.

Les propriétés des nombres dérivés des fonctions d'une seule variable ne s'étendent pas aux ensembles à plusieurs dimensions. La généralisation ne devient possible qu'en restreignant la classe des fonctions qu'on étudie, et c'est ce que nous ferons en nous bornant aux fonctions additives et absolument continues.

Pour faire cette théorie, il convient d'abord d'établir un théorème géométrique fondamental dû à M. Vitali.

98. Théorème de M. Vitali. — *Soient donnés un ensemble* E *mesurable (borné ou non) et une famille* $\mathfrak{F}$ *de cercles* [2] *telle que chaque*

[1] En particulier aux ensembles linéaires, et elle contient, comme cas particulier, quelques uns des théorèmes établis dans le *t.* I.

[2] On remplace les cercles par des sphères ou des hypersphères si l'ensemble a plus de deux dimensions, par un intervalle si l'ensemble est linéaire. La limite à assigner au coefficient k dans la démonstration du théorème dépend de ces hypothèses.

point de l'ensemble soit le centre d'une infinité de cercles de cette famille aussi petits qu'on veut. Alors on peut trouver dans la famille un nombre fini ou une infinité dénombrable de cercles sans points communs, qui couvrent tout E *à un ensemble de mesure nulle près, et dont la somme des mesures surpasse* mE *au plus d'une quantité* ε *aussi petite que l'on veut.*

Enfermons E dans un ensemble A de carrés n'empiétant pas, de manière que tout point de E soit intérieur à A au sens étroit et que l'on ait $m\mathrm{A} < m\mathrm{E} + \varepsilon$.

Excluons alors de la famille $\mathfrak{F}$ tous les cercles qui sortent de A. Soit $\mathfrak{F}_1$ la famille ainsi réduite; elle jouit encore des mêmes propriétés que $\mathfrak{F}$ relativement à E.

Nous allons d'abord montrer que l'*on peut, à l'aide d'un nombre limité de cercles de* $\mathfrak{F}_1$ *qui ne se touchent pas, couvrir une portion de* E *de mesure supérieure à* $k(m\mathrm{E})$, *si* k *est un coefficient* $< \frac{1}{4}$.

A cet effet, soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ une suite positive tendant vers 0, et soit E_n l'ensemble des points de E qui sont le centre d'un cercle de $\mathfrak{F}_1$ de rayon $> \varepsilon_n$. Quand n tend vers l'infini, $m\mathrm{E}_n$ tend vers $m\mathrm{E}$; on peut donc prendre n assez grand pour que la différence soit $< \varepsilon$. Si E_n n'était pas borné, on le bornerait de telle manière que cette condition ait encore lieu.

Or, si l'on tolère l'empiètement, E_n (supposé borné) peut-être entièrement recouvert par un nombre limité de ces cercles de rayon $> \varepsilon_n$. Il suffit pour y arriver de couvrir E_n d'un quadrillage à mailles carrées et de diagonales $< \varepsilon_n$, de choisir un point de E_n dans chaque maille où il en existe au moins un, et de mener un des cercles de rayon $> \varepsilon_n$ ayant ce point pour centre (donc un nombre limité de cercles).

Ceci fait, les cercles employés, couvrant tout E_n, ont une somme de mesures $> m\mathrm{E}_n$, mais il peut y avoir des empiètements. Faisons les disparaître, en supprimant d'abord tous les cercles qui rencontrent le plus grand des cercles non isolés, ensuite ceux qui rencontrent le plus grand des cercles qui sont encore non isolés après cette suppression, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des cercles isolés. Les cercles conservés mesurent encore au moins le quart de la surface primitivement recouverte, donc au moins $\frac{1}{4}\, m\mathrm{E}_n$ et *à fortiori* $\frac{1}{4}\, m\mathrm{E} - \varepsilon$.

La portion de E non recouverte est tout entière dans la portion de A extérieure aux cercles conservés; elle est donc de mesure moindre que $m\mathrm{A} - \frac{1}{4}\, m\mathrm{E} + \varepsilon$ et *a fortiori* que $\frac{3}{4}\, m\mathrm{E} + 2\varepsilon$. En définitive, la mesure de la fraction de E recouverte surpasse donc $\frac{1}{4}\, m\mathrm{E} - 2\varepsilon$, ce qui prouve notre proposition préliminaire.

La démonstration du théorème de M. Vitali résulte de l'application répétée du même procédé.

Soit e_1 la portion de E recouverte après l'opération précédente,

Débarrassons $\mathfrak{F}_1$ de tous les cercles qui rencontrent ceux qui ont servi à couvrir e_1 (ce qui n'altère pas les propriétés de la famille relativement à l'ensemble restant $E - e_1$) et soit $\mathfrak{F}_2$ la famille ainsi réduite. Nous pouvons couvrir une portion e_2 de $E - e_1$ de mesure $> k\, m\,(E - e_1)$ par un nombre limité de cercles de $\mathfrak{F}_2$ sans point commun.

Nous débarrassons alors $\mathfrak{F}_2$ de tous les cercles qui rencontrent ceux qui ont servi, et nous continuons ainsi de suite, au besoin indéfiniment. Nous ferons bien ainsi le choix demandé par le théorème de M. Vitali, car, après h opérations, nous aurons

$$m\, e_h > k\,(mE - m\, e_1 - m\, e_2 - \cdots - m\, e_{h-1}).$$

Cette parenthèse est positive (ou nulle), donc si les opérations se prolongent indéfiniment, la série $\Sigma\, m\, e_h$ est convergente, donc $m\, e_h$ tend vers 0, et, par conséquent, $\Sigma\, m\, e_h$ tend vers mE.

A la limite, E est donc recouvert à un ensemble de mesure nulle près; d'ailleurs, tous les domaines employés étant isolés et compris dans A, la somme de leurs mesures est $< mA$, donc $< mE + \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Lorsqu'une condition est réalisée à un ensemble de mesure nulle près, nous dirons, avec M. Lebesgue, qu'elle est *presque réalisée*. Ainsi, dans le cas précédent, nous dirons que E est *presque* recouvert. De même, si une condition est réalisée pour tous les points d'un ensemble E sauf dans un ensemble de mesure nulle, nous dirons qu'elle est réalisée *presque partout* dans E.

99. Propriétés des nombres dérivés. — 1° *Si une fonction d'ensemble additive et absolument continue,* F, *a son nombre dérivé supérieur (inférieur)* DF *positif presque partout dans un ensemble e de mesure non nulle,* F(e) *est positif.*

Soit ε un nombre positif ou nul, et e' un ensemble de points de e où DF est $> \varepsilon$. On peut attacher à chacun des points de e' une famille de cercles γ aussi petits qu'on veut et tels qu'on ait $F(\gamma) > \varepsilon(m\gamma)$. Or on peut, par le théorème précédent, couvrir presque tout e' à l'aide de cercles γ non empiétants et dont la somme des mesures est infiniment voisine de me'. Additionnant les inégalités comprises dans la précédente pour tous ces γ, il vient, à la limite, F étant absolument continue, $F(e') \geqslant \varepsilon(m\, e')$.

Supposons d'abord $\varepsilon > 0$; on voit que $F(e'')$ est $\geqslant 0$ dans toute portion e'' de e, car DF est > 0 dans un ensemble e' formé de presque tout e'' et $F(e'') = F(e') \geqslant 0$.

Prenant ensuite ε assez petit pour que DF soit $> \varepsilon$ dans une portion e' de e de mesure non nulle, on a

$$F(e) \geqslant F(e') \geqslant \varepsilon(me') > 0,$$

ce qui prouve la proposition.

2° *Dans les mêmes conditions, si* DF *est négatif presque partout dans* e, F(e) *est négatif.*

3° *Si* DF *est nul presque partout dans* e, F(e) *est nul.*

En effet, si ε est une constante positive ou négative infiniment petite, la fonction $F(e) + \varepsilon e$, ayant ε pour dérivée presque partout, a le signe de ε en vertu des deux règles précédentes, ce qui exige que $F(e) = 0$.

4° *Si* $F(e') = 0$ *dans toute portion* e' *d'un ensemble* e, $DF = 0$ *presque partout dans* e.

En effet, dans le cas contraire, il devrait exister dans e un ensemble e' de mesure non nulle où DF aurait un même signe, auquel cas $F(e')$ ne serait pas nul.

5° *Etant données deux fonctions* F *et* Φ *additives et absolument continues, si leurs nombres dérivés supérieurs (inférieurs) satisfont, presque partout dans* e, *aux relations* $DF \geqslant D\Phi$ *ou* $DF \leqslant D\Phi$, *on a* $F(e) \geqslant \Phi(e)$ *ou* $F(e) \leqslant \Phi(e)$.

Pour démontrer la première relation, il suffit d'observer que $D(F-\Phi)$ ne peut être moindre que $DF - D\Phi$ ni que $DF - \underline{D}\Phi$ et est, par conséquent positif presque partout, donc $F - \Phi$ est nul ou positif. La seconde relation se ramène à la première en changeant les signes.

6° *Dans les mêmes conditions, si* $DF = D\Phi$ *presque partout, on aura* $F(e) = \Phi(e)$.

En effet, ε étant infiniment petit, la fonction $[F(e) + \varepsilon e] - \Phi(e)$ ne peut avoir d'autre signe que celui de ε au vertu du théorème précédent, donc $F(e) - \Phi(e) = 0$.

100. Définition (au sens général) des dérivées. — Dans un sens plus général, les nombres dérivés d'une fonction d'ensemble F au point P sont les plus grande et plus petite limites du quotient $F(\omega) : m\omega$, où ω désigne un ensemble dont la mesure tend vers zéro, mais *qui est astreint à la condition de faire partie d'une famille* RÉGULIÈRE. Il faut, pour cela, par définition de ce mot, que le rapport de la mesure de ω à celle du plus petit cercle γ de centre P qui contient ω, ne puisse pas tendre vers O avec $m\omega$, quand ω appartient à cette famille.

On verra plus loin que le choix de la famille d'ensembles ω ne peut influer sur la valeur de la dérivée que dans un ensemble de mesure nulle. Il en résultera que toutes les propriétés du n° précédent et celle d'être mesurable demeurent vraies pour la dérivée généralisée.

Cette conclusion trouve son principe dans une remarque fondamentale qui résulte immédiatement de la condition de régularité imposée aux ensembles ω : *Si la dérivée d'une fonction* POSITIVE *est nulle avec la définition restreinte, elle reste nulle avec la définition généralisée.*

En effet, si $F(\gamma) : m\gamma$ tend vers zéro et que $m\gamma : m\omega$ reste fini, on aura encore

$$\lim \frac{F(\omega)}{m\omega} = \lim \frac{F(\gamma)}{m\omega} \leq \lim \frac{m\gamma}{m\omega} \cdot \frac{F(\gamma)}{m\gamma} = 0.$$

L'importance de cette remarque va apparaître tout de suite dans l'étude d'une fonction d'ensemble particulièrement simple, à laquelle se rattache la définition de la *densité* (Lebesgue).

101. Densité d'un ensemble E en un point. — Soient E un ensemble fixe, e un ensemble variable, eE l'ensemble commun. Considérons la fonction d'ensemble

$$F(e) = m(Ee).$$

Les nombres dérivés de cette fonction au point P sont les *densités supérieure* et *inférieure* de l'ensemble E au point P. Si elles sont égales, leur valeur commune est la *densité* de E au point P et celle-ci est *déterminée*. Nous représenterons ces nombres respectivement par $\overline{D}E$, $\underline{D}E$ et DE.

La densité peut être, en même temps que la dérivée, définie *au sens restreint* ou *au sens général*. Au sens restreint, la densité au point P est donc la limite du rapport de la mesure de la portion de E comprise dans un cercle γ de centre P à la mesure de γ quand γ tend vers O. On passe à la définition générale en remplaçant la famille des cercles γ par une famille régulière d'ensembles ω (n° 100). D'après cela, la valeur d'un nombre dérivé ne peut varier qu'entre O et 1.

Considérons les deux ensembles complémentaires E et CE. Il existe entre leurs densités une relation fondamentale. On a, en effet, quel que soit l'ensemble ω de mesure infiniment petite,

$$\frac{m(E\omega)}{m\omega} + \frac{m(CE.\omega)}{m\omega} = 1.$$

Ainsi, si le premier terme tend vers sa limite supérieure, le second tend vers sa limite inférieure, et réciproquement. Par suite

$$\overline{D}E + \underline{D}(CE) = \underline{D}E + \overline{D}(CE) = 1.$$

Donc, *si la densité d'un ensemble est déterminée, celle du complémentaire l'est aussi et est le complément de la première relativement à l'unité.*

En vertu de la remarque qui termine le n° précédent, *si la densité est égale à* O *avec la définition restreinte, elle l'est encore avec la définition généralisée*, donc *la même chose a lieu si la densité est égale à* 1 (par la considération du complémentaire).

Enfin nous avons encore la proposition fondamentale suivante, qu'il suffit, d'après cela, de démontrer pour la dérivée au sens restreint :

La densité (au sens général) *d'un ensemble* E *est égale à* 1 *presque partout dans* E, *et à* O *presque partout hors de* E.

En effet, la fonction d'ensemble e, $m(e.\text{CE})$, étant nulle dans toute por-

tion e de E, sa dérivée (au sens restreint) est nulle presque partout dans E (nº 99,4º). En d'autres termes, presque partout, la densité de $\complement E$ est nulle dans E et, par suite, celle de E égale à l'unité.

102. Dérivée d'une intégrale indéfinie. — *L'intégrale indéfinie d'une fonction sommable $f(P)$ a pour dérivée $f(P)$ presque partout.*

Il suffit de considérer l'intégrale indéfinie d'une fonction non négative,

$$F(e) = \int_e f(P) dP.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire ; donnons-nous une échelle $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots k\varepsilon, \ldots$ et soit e_k l'ensemble des points où l'on a $k\varepsilon \leqslant f < (k+1)\varepsilon$.

On peut décomposer $F(e)$ dans la somme de deux fonctions d'ensemble e :

$$F(e) = F(e\, e_k) + F[e(\complement e_k)].$$

Mais $F[e(\complement e_k)]$, étant nulle dans toute portion e de e_k, a sa dérivée au sens restreint (nº 99), donc aussi au sens général (nº 100), nulle presque partout dans e_k. Donc $DF(e) = DF(e\, e_k)$ presque partout dans e_k.

Or on a, par le théorème de la moyenne (nº 94).

$$F(e\, e_k) = (k + \theta)\varepsilon \, . \, m(e\, e_k) \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

de sorte que $DF(e\, e_k) = (k + \theta)\varepsilon$ en tout point où la densité de e_k est égale à 1, c'est-à-dire presque partout dans e_k. Donc $DF(e)$ est égal à f à moins de ε près presque partout dans e_k.

Tout point P appartenant à un ensemble e_k, il s'ensuit que F a f pour dérivée à moins de ε près presque partout. Faisant tendre ε vers 0, on obtient la démonstration du théorème.

Remarque. — On peut donner au théorème précédent une extension souvent utile :

Si $f(P)$ est sommable, l'expression $|f(P) - c|$ est presque partout la dérivée de son intégrale indéfinie, c restant arbitraire (Lebesgue).

En effet, si c était donné, cette proposition reviendrait au théorème précédent. La proposition est donc vraie pour les valeurs rationnelles de c, dont l'ensemble est dénombrable. Mais je vais montrer qu'en un point P où $|f(P) - c|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie quel que soit c rationnel, $|f(P) - c|$ l'est encore quel que soit c irrationnel.

Faisons, en effet, tendre c rationnel vers γ irrationnel ; on a

$$|f(P) - \gamma| = |f(P) - c| + \theta(c - \gamma) \qquad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Par conséquent,

$$\int |f(P) - \gamma|\, dP = \int |f(P) - c|\, dP + \theta(c - \gamma)\int dP$$

$$D\int |f(P) - \gamma|\, dP = |f(P) - c| + \theta(c - \gamma).$$

Donc, c tendant vers γ, cette dérivée est $|f(P) - \gamma|$.

103. Théorème. — *Une fonction d'ensemble additive et absolument continue est la différence de deux fonctions de même nature non négatives.*

Considérons une fonction d'ensemble F(e) et l'un (au sens restreint) de ses nombres dérivés DF. Soit E_1 l'ensemble de points ou DF $\geqslant 0$, E_2 celui des points où DF $\leqslant 0$.

La fonction, étant additive, se décompose, comme il suit, en deux fonctions d'ensemble e :

$$F(e) = F(eE_1) + F(eE_2).$$

Mais $F(eE_2)$, étant nul dans toute portion e de E_1, sa dérivée y est nulle presque partout (n° 99) et le nombre dérivé (positif ou nul) de F(e) est, presque partout dans E_1, celui de $F(eE_1)$. Ainsi $F(eE_1)$, ayant presque partout son nombre dérivé positif ou nul dans E_1 et aussi nul dans E_2, est une fonction non négative (n° 99). De même $F(eE_2)$ est une fonction non positive, ce qui prouve la proposition.

104. Théorème. — *Une fonction d'ensemble additive et absolument continue a une dérivée finie et déterminée presque partout et est l'intégrale indéfinie de cette dérivée.*

En vertu du théorème précédent, il suffit de considérer une fonction F(e) non négative.

Soit DF le nombre dérivé considéré. Je dis que ce nombre est fini presque partout et sommable. En effet, définissons $(DF)_n$ comme égal à DF où à n selon que DF est $\leqslant$ ou $>$ n. Il faut prouver que l'intégrale de $(DF)_n$ est bornée quel que soit n. Or ceci est bien évident, puisque cette intégrale, ayant presque partout une dérivée $(DF)_n$ non supérieure à celle de F, ne peut surpasser F (n° 99).

Ceci établi, on aura $F = \int DF\, dP$, puisque les deux membres ont même dérivée presque partout (n° 102).

Nous avons ainsi démontré l'identité des fonctions d'ensembles additives et absolument continues et des intégrales indéfinies.

105. Absolue continuité d'une fonction $f(x)$. Condition pour que $f(x)$ soit une intégrale indéfinie. — La définition de la continuité absolue peut s'étendre aux fonctions exprimées à l'aide des variables x, y. Mais nous considérerons seulement le cas des fonctions d'une seule variable x.

Une fonction $f(x)$ d'une seule variable est absolument continue (Vitali) *si la somme des variations (ou aussi bien des oscillations) de $f(x)$ dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles, tend toujours vers zéro avec la somme des amplitudes de ces intervalles.*

Une fonction $f(x)$ qui est absolument continue dans un intervalle (a,b) est nécessairement à variation bornée dans cet intervalle. En effet, si $f(x)$ n'était pas à variation bornée dans (a,b), on pourrait diviser (a, b)

en parties aussi petites que l'on veut et il y aurait toujours au moins une de ces parties aussi petites qu'on veut où la variation totale de $f(x)$ serait infinie. On pourrait faire croître indéfiniment la somme des variations de $f(x)$ dans un ensemble d'intervalles extraits eux-mêmes de cette partie, déjà aussi petite qu'on veut. La fonction ne jouirait donc pas de la propriété indiquée.

La fonction, étant à variation bornée, est l'intégrale indéfinie de sa dérivée, en vertu du théorème VII établi dans le tome I (nº 289).

De là, le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit l'intégrale indéfinie de sa dérivée considérée là où elle existe, est que cette fonction soit absolument continue.

§ 5. Réduction des intégrales doubles [1].

106. Intégrale d'une fonction bornée dans un domaine rectangulaire. — Soit $f(x, y)$ ou $f(P)$ une fonction de deux variables, mesurable et bornée dans un domaine rectangulaire R. Nous supposons, uniquement pour simplifier l'écriture, que ce rectangle de mesure 1 est borné par les valeurs 0 et 1 de x et de y.

Théorème. — *La fonction $f(x, y)$ est une fonction mesurable (linéairement) de la seule variable y, pour chaque valeur de x entre* 0 *et* 1, *sauf pour celles qui appartiennent à un ensemble de mesure nulle. Abstraction faite des points de cet ensemble, l'intégrale*

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy$$

est une fonction mesurable de x et l'on a

$$\int_R f(P)\, dP = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$$

En d'autres termes, le second membre se calcule en annulant $\int f\, dy$ aux points x où cette intégrale n'existerait pas et qui forment, au plus, un ensemble linéaire de mesure nulle.

Nous démontrerons ce théorème : 1º pour une fonction qui ne prend que deux valeurs ; 2º pour une fonction qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs; 3º pour une fonction quelconque.

Premier cas. — Soit d'abord $\theta(x, y)$ ou $\theta(P)$ une fonction qui ne prend que deux valeurs dans le rectangle R, on peut évidemment toujours admettre que ces valeurs sont 0 et 1 [2], à savoir la valeur 1

[1] Toute cette théorie s'étend d'elle-même aux intégrales d'ordre quelconque.

[2] En effet, si f prend les valeurs l_1 et l_2, la fonction $\frac{f - l_1}{l_2 - l_1}$ ne prendra que les valeurs 0 et 1 et le théorème vrai pour celle-ci sera encore vrai pour f.

dans l'ensemble E de mesure mE et la valeur O dans le complémentaire CE (relativement à R).

Enfermons E dans une infinité dénombrable de rectangles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ non empiétants, contenus dans R. Désignons par $\Theta_n(x, y)$ une fonction : égale à O hors de α_n et sur le contour des éléments α d'indices moindres, mais égale à 1 en tout autre point de α_n. Désignant aussi par α_n la mesure du rectangle, on aura

$$\alpha_n = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta_n(x,y)dy.$$

Sommons par rapport à n ; la fonction $\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_n$, étant égale à O ou à 1 quels que soient x, y, n, est essentiellement bornée, son intégrale relativement à y aussi ; nous pouvons donc sommer sous les signes $\int$ (n° 93, V). Il vient ainsi

$$\Sigma\alpha_n = \int_0^1 dx \int_0^1 (\Sigma\Theta_n)\, dy.$$

Faisons maintenant tendre la mesure $\Sigma\alpha_n$ de l'ensemble des α vers mE par une réduction continue de l'ensemble des α. La fonction $\Sigma\Theta_n$, qui est égale à 1 dans l'ensemble des α et à O en dehors (donc $\geqslant \theta$), sera constante ou décroissante en chaque point et tendra vers une limite Θ' égale à O ou à 1, mais toujours $\geqslant \theta$. Les fonctions sous les signes $\int$ étant essentiellement bornées, on peut passer à la limite sous ce signe dans la dernière équation, ce qui donne

$$m\mathrm{E} = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta' dy, \qquad \Theta' \geqslant \theta.$$

On prouve de même que l'on peut définir une fonction Θ'' égale à O ou à 1, telle qu'on ait

$$m(\mathrm{CE}) = \int_0^1 dx \int_0^1 (1 - \Theta'')\, dy, \qquad 1 - \Theta'' \geqslant 1 - \theta.$$

En ajoutant ces deux équations et retranchant l'unité des deux membres, on voit que l'on a

$$0 = \int_0^1 dx \int_0^1 (\Theta' - \Theta'')dy, \qquad \Theta' \geqslant \theta \geqslant \Theta''.$$

Ainsi : 1°) la fonction de x, essentiellement positive, $\int(\Theta' - \Theta'')\, dy$, ayant son intégrale nulle, est nulle elle-même sauf pour un ensemble X de valeurs de x de mesure nulle ; 2°) abstraction faite des valeurs de x contenues dans X, la fonction de y, essentiellement positive, $\Theta' - \Theta''$ ayant une intégrale nulle, s'annulle elle-même presque partout, donc $\Theta' = \Theta''$ et, par suite, $\Theta' = \Theta'' = \theta$ presque partout, et θ est fonction mesurable de y avec Θ' et Θ'' (qui sont mesurables B),

En définitive, abstraction faite des valeurs de x contenues dans l'ensemble X de mesure nulle, on a

$$\int_0^1 \Theta' dy = \int_0^1 \theta\, dy;$$

et, en négligeant ces valeurs de x dans l'intégration,

$$m\mathrm{E} = \int_0^1 dx \int_0^1 \Theta' dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \theta\, dy.$$

D'aillleurs mE est égale à $\int_{\mathrm{R}} \theta(\mathrm{P})d\mathrm{P}$ par définition, ce qui établit la formule relative au premier cas :

$$\int_{\mathrm{R}} \theta(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = \int_0^1 dx \int_0^1 \theta(x,y)\, dy.$$

Deuxième cas. — Considérons une fonction $f(x, y)$ qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs différentes dans le rectangle R, par exemple les valeurs l_1, l_2,... l_k ,... l_n. On peut considérer f comme la somme de n fonctions f_1, f_2,... f_k ,... f_n, l'une d'elles f_k ne prenant que deux valeurs O et l_k. Le théorème est vrai pour chaque fonction f_k ; il demeure donc vrai pour leur somme.

Troisième cas. — Considérons enfin le cas général où $f(x, y)$ est une fonction bornée et mesurable quelconque. Nous pouvons déterminer une fonction mesurable F(x, y) qui ne prend qu'un nombre limité de valeurs et diffère de f de moins de ε. Il suffit pour cela de se donner une échelle ... l_i, l_{i+1},... croissant par degrés $< \varepsilon$ et de prendre, pour chaque valeur de l'indice i, F_n égal à l_i dans l'ensemble $\mathrm{E}(l_i \leqslant f < l_{i+1})$.

Dans ce cas, on a, par la démonstration précédente,

$$\int_{\mathrm{R}} \mathrm{F}(\mathrm{P})d\mathrm{P} = \int_0^1 dx \int_0^1 \mathrm{F}(x,y)\, dy.$$

Donnons maintenant à ε une suite dénombrable de valeurs tendant vers O ; la fonction F tend uniformément vers f, donc, au premier membre, l'intégrale double tend vers celle de $f(\mathrm{P})d\mathrm{P}$.

D'autre part, au second membre, pour chaque ε, F(x, y) est fonction mesurable de y sauf pour un ensemble E_ε de valeurs de x de mesure nulle; donc, quel que soit ε, F(x, y) est fonction mesurable de y, sauf dans un ensemble $\mathrm{E} = \Sigma \mathrm{E}_\varepsilon$ de valeurs de x de mesure nulle. Dans le complémentaire de cet ensemble, on a, sans difficulté, la convergence de F étant uniforme,

$$\lim \int_{\mathrm{CE}} dx \int_0^1 \mathrm{F}(x,y)dy = \int_{\mathrm{CE}} dx \int_0^1 f(x,y)dy.$$

Donc, à condition de négliger cet ensemble E de mesure nulle,

$$\int_R f(P)dP = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy.$$

On est ainsi conduit au théorème suivant :

107. Théorème de Lebesgue-Fubini. — *Si $f(x, y)$ ou $f(P)$ est une fonction mesurable (superficiellement) et bornée dans un ensemble borné* E, *on a*

$$\int_E f(P)dP = \int dx \int f(x,y)\,dy = \int dy \int f(x,y)\,dx,$$

les intégrales intérieures étant effectuées respectivement sur les sections de E *par les droites $x = x$ ou $y = y$, mais il faut faire abstraction des sections sur lesquelles les intégrales n'existeraient pas. Cela revient à supprimer de* E *un ensemble (superficiel) de points de mesure nulle, ou encore à annuler f aux points d'un ensemble (superficiel) de mesure nulle.*

Ce théorème se ramène au précédent. Supposons E contenu dans le rectangle R, limité par les abscisses a, b et les ordonnées c, d. Soit $f_1 = f$ dans E et $= 0$ en dehors ; on a, par ce qui précède,

$$\int_R f_1(P)\,dP = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f_1(x,y)dx,$$

à condition de négliger les points de E qui se trouvent sur certaines sections définies par des valeurs de x ou de y appartenant à des ensembles linéaires de mesure nulle, ce qui revient à négliger un ensemble superficiel de points de mesure nulle. La formule précédente est d'ailleurs équivalente à celle de l'énoncé, lequel est ainsi démontré.

Nous allons maintenant passer à la considération des fonctions et des ensembles non bornés, mais il nous faut d'abord établir un théorème auxiliaire très important :

108. Théorème. — *Soit $F_n(x)$ une fonction de x positive, mesurable dans l'ensemble* E *borné ou non. Si c'est une fonction* NON DÉCROISSANTE *de l'indice n qui tend vers une limite finie ou infinie $F(x)$ pour $n = \infty$, on a toujours, les deux membres étant égaux ou tous deux infinis,*

$$\lim_{n=\infty} \int_E F_n(x)\,dx = \int_E F(x)dx.$$

Supposons d'abord E borné. Posons, μ étant un nombre positif,

$$F_\mu = \begin{cases} F, \text{ si } F \leqslant \mu ; \\ \mu, \text{ si } F \geqslant \mu. \end{cases} \qquad F_{n\mu} = \begin{cases} F_n, \text{ si } F_n \leqslant \mu ; \\ \mu, \text{ si } F_n \geqslant \mu. \end{cases}$$

De la sorte, $F_{n\mu}$ tend vers F_μ en restant bornée quand n tend vers l'infini, et l'on a, sans difficulté,

$$\lim_{n=\infty}\int_E F_{n\mu}\,dx = \int_E F_\mu dx;$$

par suite, comm F_n est $\geqslant F_{n\mu}$;

$$\lim_{n=\infty}\int_E F_n\,dx \geqslant \int_E F_\mu\,dx.$$

Faisons tendre μ vers l'infini ; l'intégrale de F_μ tend, par définition, vers celle de F. On a donc, à la limite

$$\lim_{n=\infty}\int_E F_n dx \geqslant \int_E F\,dx.$$

Mais, comme F_n est $\leqslant$ F, on peut renverser le sens de cette inégalité, ce qui prouve que les deux membres sont égaux.

Supposons maintenant E non borné. On a, par la démonstration ci-dessus, pour toute portion bornée E′ de E,

$$\lim_{n=\infty}\int_E F_n\,dx \geqslant \lim_{n=\infty}\int_{E'} F_n dx = \int_{E'} F dx.$$

Donc, à la limite E′ tendent vers E, par définition de l'intégrale de F dans E,

$$\lim_{n=\infty}\int_E F_n\,dx \geqslant \int_E F dx.$$

Mais, comme $F_n \geqslant$ F, on peut encore renverser le sens de l'inégalité, ce qui prouve l'égalité des deux membres.

Remarque. — Le théorème subsiste si les conditions en sont vérifiées abstraction faite des valeurs de x dans un ensemble E′ de mesure nulle que l'on néglige. En effet, il est prouvé pour l'ensemble E — E′ et les intégrales sont alors les mêmes, *par définition*, dans E que dans E—E′.

109. Théorème. — *Si la fonction* $f(x, y)$ NON NÉGATIVE *est mesurable (superficiellement) dans un ensemble* E *borné ou non, on a*

$$\int_E f(P)\,dP = \int dx\int f\,dy = \int dy\int f\,dx.$$

Les intégrales intérieures sont effectuées sur les sections du domaine E *par des parallèles aux axes. Elles peuvent cesser d'exister pour des ensembles de valeurs de x et de y de mesures nulles que l'on négligera.*

Les égalités sont toujours vraies en ce sens que si l'un des trois membres est fini, ils sont égaux tous trois; si l'un d'eux est infini, ils le sont tous trois.

Il n'y a qu'à reproduire textuellement la démonstration du nº 54, en laissant de côté la condition d'existence de F qui est assurée et en remplaçant le théorème du nº 52 sur lequel cette démonstration repose par le théorème plus précis du numéro précédent, y compris la remarque finale.

110. Théorème de M. Fubini. — *Si la fonction $f(x, y)$ de signe quelconque est sommable dans l'ensemble* E, *on a, à condition de négliger comme ci-dessus un ensemble de points de* E *de mesure nulle,*

$$\int_E f(P)dP = \int dx \int f dy = \int dy \int f dx.$$

Ce théorème se ramène au précédent, car toute fonction sommable f est la différence de deux fonctions sommables non négatives f_1 et f_2. Chacune d'elles vérifie les relations du théorème précédent : soustrayant membre à membre, on obtient la formule ci-dessus.

Remarque. — Dans les égalités du théorème précédent, l'existence du premier membre entraine l'existence des deux autres, mais il est facile de voir que la réciproque n'est pas vraie.

111. Dérivation partielle des intégrales indéfinies. — Soit $f(x, y)$ une fonction sommable. Nous pouvons poser

$$F(x, y) = \int_0^x dx \int_0^y f dy = \int_0^y dy \int_0^x f dx,$$

la fonction f étant, au besoin, modifiée aux points d'un ensemble de mesure nulle.

La fonction $F(x, y)$ est l'*intégrale indéfinie de $f(x, y)$ exprimée à l'aide des variables x, y.*

Pour chaque valeur de y, on a, pour presque toutes les valeurs de x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f dy;$$

et, pour chaque valeur de x, on a, pour presque toutes les valeurs de y,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f dx.$$

L'ensemble des valeurs exceptionnelles de x, y où la première (la seconde) de ces deux formules est en défaut, est un ensemble (superficiel) mesurable, car c'est l'ensemble des points où la différence de deux fonctions mesurables $(D_x F - f)$ diffère de zéro. C'est donc un ensemble superficiel de mesure nulle.

En négligeant cet ensemble de mesure nulle, il reste donc un ensemble sur lequel F est partout dérivable par rapport à x et à y et où ces dérivées s'obtiennent par les deux formules précédentes.

En dérivant maintenant par rapport à y et à x, on voit, exactement de la même façon, que l'on aura *presque partout*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = f.$$

Ces résultats s'étendent d'eux-mêmes à une intégrale n-uple, F, de fonction sommable, f, de n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \int_0^{x_1} dx_1 \int_0^{x_2} dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f\, dx_n.$$

Cette fonction F possède *presque partout* les propriétés suivantes : elles est dérivable *une fois* par rapport à chaque variable ; si l'on dérive successivement par rapport à plusieurs variables différentes, le résultat est indépendant de l'ordre des dérivations et s'obtient en supprimant au second membre de l'équation précédente les intégrations relatives aux variables par rapport auxquelles on dérive (LEBESGUE).

§ 6. Application à l'intégration par parties, à la dérivation sous le signe et aux intégrales curvilignes.

112. Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions de x. *La règle d'intégration par parties* :

$$\int_a^x uv'dx = \Big[uv \Big]_a^x - \int_a^x vu'dx,$$

subsiste, pourvu que les fonctions u et v soient absolument continues dans l'intervalle (a, x).

En effet, u' et v' (considérés là ou ils existent, donc presque partout) sont sommables. Donc les deux membres de la relation précédente sont des fonctions absolument continues ayant la même dérivée presque partout ; de plus, ils s'annulent pour $x = a$. Par conséquent, ils sont égaux.

Il est à remarquer que les conditions admises ici sont plus larges en un sens que celles du n° 49, mais ne les renferment pas.

113. Extension de la règle de Leibnitz. — Soit $f(x, \alpha)$ une fonction sommable de x dans l'intervalle (a, b) pour chacune des valeurs de α entre α_0 et α_1. Considérons la fonctions de α, bien déterminée entre ces deux limites,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

On peut, relativement à la dérivation sous le signe, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* 1°) $f(x, \alpha)$ *est une fonction absolument continue de* α *dans l'intervalle* (α_0, α_1) *pour chaque valeur particulière de* x *entre* a *et* b ; *si* 2°) $f'_\alpha(x, \alpha)$ *considéré là où il existe est sommable (superficiellement) dans le rectangle* R *limité aux valeurs* a, b, *de* x *et* α_0, α_1 *de* α, *alors on a, pour presque toutes les valeurs de* α *entre* α_0 *et* α_1,

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

En particulier, cette relation s'applique en chaque point α où le second membre est la dérivée de son intégrale indéfinie.

Remarquons d'abord que $f(x, \alpha)$ est, par l'hypothèse de l'absolue continuité, une intégrale indéfinie en α, donc que f'_α existe pour presque toutes les valeurs de α (x étant donné). Comme la dérivée f'_α est supposée mesurable dans la portion de R où elle existe, la portion de R où f'_α n'existe pas est mesurable, donc de mesure nulle (puisque ses sections par les droites $\alpha = \alpha$ sont de mesure nulle).

Ceci entendu, posons

$$\psi(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Entre α_0 et α_1, $\psi(\alpha)$ ne peut cesser d'exister que dans un ensemble de mesure nulle et est sommable dans l'ensemble où il existe. Considérons $\psi(\alpha)$ aux seuls points où il existe, et intégrons dans une portion $\alpha_0\, \alpha$ de l'intervalle (α_0, α_1); il vient, en intervertissant les intégrations (n° 110) et en observant que f (qui est absolument continue) est l'intégrale indéfinie de f'_α par rapport à α,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \psi(\alpha)\, d\alpha = \int_a^b [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)] d\alpha = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0).$$

Donc $\varphi'(\alpha) = \psi(\alpha)$ en tout point où $\psi(\alpha)$ est la dérivée de son intégrale indéfine, donc presque partout, ce qui prouve la proposition.

Remarques. — La condition 1°) du théorème précédent sera certainement vérifiée si f'_α est partout finie dans R, puisque f est alors son intégrale (*t.* I, n° 282).

Enfin, si les conditions du théorème sont vérifiées, la règle de Leibnitz sera applicable pour toutes les valeurs de α si elle conduit à une intégrale $\psi(\alpha)$ fonction continue de α (car $\psi(\alpha)$ est alors partout la dérivée de son intégrale indéfinie).

114. Généralisation de la formule de Green. — Soient P et Q deux fonctions continues de x et de y. Considérons l'intégrale curviligne,

$$\int_C P dx + Q dy,$$

effectuée sur un contour fermé simple C limitant un domaine D du plan. Nous supposerons, pour simplifier, que ce contour n'est rencontré qu'en deux points d'abscisses x_1 et x_2 par une parallèle à l'axe des x, en deux points d'ordonnées y_1 et y_2 par une parallèle à l'axe des y.

Supposons que, dans l'intérieur du domaine D, la fonction P soit une fonction absolument continue de y pour chaque valeur de x et la fonction Q une fonction absolument continue de x pour chaque valeur de y; alors P'_y et Q'_x existent respectivement pour presque chaque valeur de y et presque chaque valeur de x (l'autre variable étant donnée) et ont

respectivement pour intégrales indéfinies par rapport à y et à x les fonctions P et Q.

Supposons que P'_y et Q'_x considérés là où ils existent dans le domaine D (c'est-à-dire presque partout) soient sommables. Il viendra, en appliquant le théorème de M. Fubini (nº 110),

$$\iint_D P'_y\,dx\,dy = \int dx \int P'_y\,dy = \int [P(x,y_2) - P(x,y_1)]dx = -\int_C P\,dx.$$

de même,

$$\iint_D Q'_x\,dx\,dy = \int dy \int Q'_x\,dx = \int [Q(x_2,y) - Q(x_1,y)]\,dy = \int_C Q\,dy;$$

et, en retranchant membre à membre,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy.$$

Mais on doit négliger au second membre les points où les dérivées partielles n'existeraient pas toutes les deux. De là le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La formule de Green qui ramène une intégrale de contour à une intégrale double subsiste, sans faire aucune hypothèse sur l'existence et la continuité des dérivées de* P *et de* Q, *moyennant les conditions suivantes :* 1°) *les fonctions* P *et* Q *sont continues dans l'aire intérieure au contour ;* 2°) P *est fonction absolument continue de* y, Q *fonction absolument continue de* x ; 3°) P'_y *et* Q'_x, *considérés là où ils existent, sont sommables dans l'aire intérieure au contour.*

Il est à remarquer que les conditions d'absolue continuité imposées à P et Q seront réalisées si l'un des nombres dérivés de P par rapport à y et l'un des nombres de Q par rapport à x sont finis dans toute l'aire, car P et Q sont alors les intégrales indéfinies de ces nombres dérivés.

Le théorème précédent en fournit immédiatement deux autres :

115. Théorèmes sur les intégrales curvilignes. — I. *L'intégrale de* $P\,dy + Q\,dy$, *effectuée sur un contour fermé* C *enveloppant une aire* D, *sera nulle, si les trois conditions indiquées dans le théorème précédent se vérifient dans cette aire et si, en outre, on a* $P'_y = Q'_x$ *en tous les points de l'aire* D *où ces dérivées existent, à l'exception d'un ensemble de points de mesure nulle.*

II. *Si toutes ces conditions sont réalisées dans une aire* D, *l'intégrale de* $P\,dx + Q\,dy$, *effectuée sur une courbe rectifiable quelconque tracée dans l'aire* D, *ne dépend que de ses limites* (cf. nº 77).

CHAPITRE IV.

Approximation et Représentation analytique des fonctions.

Séries de polynomes et séries trigonométriques.

§ 1. Approximation des fonctions continues d'une variable par des polynomes.

116. Préliminaire. — Le problème de la représentation d'une fonction $f(x)$ par une série de polynomes est le même que celui de l'approximation indéfinie par des polynomes, car, si un polynome $P_n(x)$, défini en fontion de n, tend (ou tend uniformément) vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini, la série

$$P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots$$

converge aussi (uniformément) vers $f(x)$.

C'est le problème de la représentation approchée par des polynomes que nous allons d'abord traiter. Nous donnerons aux polynomes servant à cette fin le nom de *polynomes approximatifs* [1]. Rappelons d'abord l'intégrale bien connue (*t.* I, n° 236), qui va jouer un rôle important dans notre analyse,

$$\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt = 2\int_0^1(1-t^2)^n\,dt = k_n,$$

où k_n est le nombre rationnel (*t.* I, n° 236),

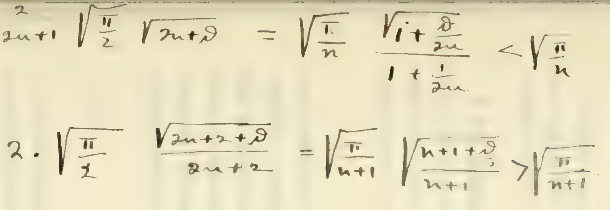
$$k_n = 2\,\frac{2\,.\,4\ldots 2n}{3\,.\,5\ldots(2n+1)}.$$

Quand n tend vers l'infini, la valeur asymptotique de k_n se tire de la formule de Wallis (*t.* I, n° 237):

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)\,!!}{(2n-1)\,!!}\right]^2 \frac{1}{2n+\theta},$$

d'où il suit que k_n est compris entre $\sqrt{\dfrac{\pi}{n+1}}$ et $\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

[1] On réserve généralement le nom de *polynome d'approximation* de degré n au polynome de degré n qui donne la meilleure approximation possible.



$$k_n = \frac{2}{2n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sqrt{2n+\vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\;\frac{\sqrt{1+\frac{\vartheta}{2n}}}{1+\frac{1}{2n}} < \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

$$k_n = 2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\frac{\sqrt{2n+2+\vartheta}}{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\;\sqrt{\frac{n+1+\frac{\vartheta}{2}}{n+1}} > \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$$

Ajoutons une remarque encore qui nous servira. L'expression $(1-t^2)^n$ où $0 < t < 1$ est infiniment petite pour n infiniment grand. Ses dérivées aussi. Mais $D^r(1-t^2)^n$ *sera un infiniment petit de l'ordre de* $n^r(1-t^2)^n$. On a, en effet,

$$D(1-t^2)^n = -2nt(1-t^2)^{n-1}$$

et, par la règle de Leibnitz, pour calculer $D^{r-1}uv$,

$$D^r(1-t^2)^n = -2nt\, D^{r-1}(1-t^2)^{n-1} - 2(r-1)\, n\, D^{r-2}(1-t^2)^{n-1}$$

D'après cela, le théorème, vrai pour les ordres $r-1$ et $r-2$, subsiste pour l'ordre r; il est donc général, car il est vrai pour les ordres 0 et 1.

117. Définition du polynome approximatif P_n. — Soit à représenter dans un intervalle (a, b) fini la fonction $f(x)$ *continue dans cet intervalle.* On peut toujours admettre que cet intervalle est intérieur *au sens étroit* à l'intervalle (0, 1), c'est-à-dire qu'on a

$$0 < a < b < 1,$$

car il suffit de faire une substitution linéaire sur la variable x pour ramener n'importe quel intervalle fini au précédent. Cette substitution transforme un polynome en un autre et introduit seulement des facteurs constants dans les dérivations, ce qui n'altère pas nos conclusions. Comme nous allons le montrer, on définit un polynome approximatif de $f(x)$ par la formule

$$(1) \qquad P_n = \frac{1}{k_n}\int_a^b f(u)\,[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

En développant cette puissance, on aperçoit immédiatement que P_n est un polynome de degré $2n$ en x dont les coefficients sont des intégrales définies.

Si l'on change la variable d'intégration u en $u+x$, on peut aussi mettre P_n sous la forme

$$(2) \qquad P_n = \int_{a-x}^{b-x} f(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du.$$

118. Propriétés du polynome P_n. — Cherchons d'abord si P_n a une limite pour $n=\infty$ et quelle est cette limite. Donnons-nous un intervalle (a', b') intérieur (au sens étroit) à (a, b). Prenons ε positif et infé-

rieur aux deux différences $a' - a$ et $b - b'$. On peut faire la décomposition en trois intégrales :

$$P_n = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x} f(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du.$$

Moyennant l'hypothèse faite sur ε, les deux dernières sont moindres en valeur absolue que

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n}\left[\int_{a-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b-x} |\, f(u+x)\,|\, du\right]$$

et tendent, par conséquent, uniformément vers 0 pour x infini, car on a

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n} < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,(1-\varepsilon^2)^n < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,e^{-n\varepsilon^2}.$$

La limite de P_n sera donc la même que celle de la première intégrale, à savoir :

$$\text{(3)} \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du$$

Soit θ compris entre -1 et $+1$, il vient donc, par le théorème de la moyenne.

$$\lim P_n = \lim f(x+\theta\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(1-u^2)^n}{k_n}\,du.$$

On peut, sans altérer cette limite, étendre l'intervalle d'intégration de -1 à $+1$, car on n'ajoute ainsi (commme on vient de le voir) que des éléments qui tendent *uniformément* vers 0. On trouve ainsi (l'intégrale obtenue étant celle calculée au n° 116)

$$\lim P_n = \lim f(x+\theta\varepsilon).$$

Mais, comme ε est aussi petit qu'on veut, le second membre ne peut différer de $f(x)$. De plus, quand ε tend vers 0, $f(x+\theta\varepsilon)$ tend *uniformément* vers $f(x)$ quand x varie dans l'intervalle (a', b'). Donc la convergence de P_n vers $f(x)$ est *uniforme* dans cet intervalle.

De là, le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si n tend vers l'infini, l'intégrale* (3) *et le polynome P_n tendent uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle (a', b') intérieur au sens étroit à l'intervalle (a, b).*

Passons maintenant à l'étude des dérivées. Supposons d'ailleurs

comme précédemment que x varie dans un intervalle (a', b') intérieur à (a, b). En dérivant l'équation (1), il vient, sans difficulté, car le second membre est (par décomposition) un polynome en x dont les coefficients seuls sont des intégrales,

$$(4) \qquad D^p P_n = \frac{1}{k_n}\int_a^b f(u)\, D_x^p[1-(u-x)^2]^n\, du.$$

On peut, dans ceci, remplacer D_x par $-D_u$ et, cela fait, changer la variable d'intégration u en $u+x$. Il vient ainsi

$$(5) \qquad D^p P_n = (-1)^p \int_{a-x}^{b-x} f(u+x)\,\frac{D^p(1-u^2)^n}{k_n}\, du.$$

Mais, n° (116), $D^p(1-u^2)^n$ est, pour n infiniment grand, un infiniment petit de l'ordre de $n^p(1-u^2)^n$. Par conséquent, quelque petit que soit ε positif, la limite de l'intégrale (5) pour $n=\infty$ sera, comme dans le cas précédent, la même que celle de

$$(6) \qquad (-1)^p \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,\frac{D^p(1-u^2)^n}{k_n}\, du.$$

Supposons maintenant que l'intervalle (a', b') soit aussi intérieur à un autre (a'', b'') dans lequel la dérivée d'ordre p de $f(x)$ est continue. Prenons $\varepsilon <$ que $a'-a''$ et que $b''-b'$; alors, dans la dernière intégrale, $f(u+x)$ et ses p premières dérivées sont fonctions continues de u (tant que x est dans $a'b'$). Nous pouvons alors effectuer p intégrations par parties consécutives portant sur les dérivées de $(1-u^2)^n$. Tous les termes aux limites tendent uniformément vers zéro pour n infini. Il vient donc

$$\lim P_n = \lim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{(p)}(u+x)\,\frac{(1-u^2)^n}{k_n}\, du.$$

Cette intégrale est de la forme (3) discutée plus haut ; elle a, par conséquent, pour limite $f^{p}(u)$ et la convergence est uniforme.

De là, le théorème suivant :

Théorème II. — *Si la dérivée d'ordre p de $f(x)$ est continue dans un intervalle (a'', b'') compris dans (a, b), l'intégrale (6) et le polynome P_n convergent uniformément, quand n tend vers l'infini, vers cette dérivée de $f(x)$ dans tout intervalle intérieur à (a'', b'').*

119. Remarque. — Dans les démonstrations précédentes, la preuve de l'*uniformité de la convergence* de P_n, ou des intégrales (1),

(2), (3), s'appuie sur l'hypothèse que la fonction $f(x)$ est *uniformément* continue ; celle de l'uniformité de la convergence des dérivées de P_n, ou des intégrales (4), (5), (6), sur la propriété analogue des dérivées du même ordre de f. Donc, si l'on remplace $f(x)$ par une fonction $f(x, y, ..)$ dépendant de x et d'un certain nombre de paramètres variables $y, ...,$ *la convergence de* P_n *et de ses dérivées*, ou des intégrales (1) à (6), *restera uniforme, même si les paramètres varient dans un domaine assigné*, pourvu que $f(x, y, ...)$ et, le cas échéant, ses dérivées soient fonctions continues de x et de ces paramètres (x variant dans les limites requises par les démonstrations). Dans ces conditions, en effet, f demeure fonction *uniformément* continue de x.

Cette remarque permet d'étendre immédiatement la présente analyse aux fonctions de plusieurs variables (n° 124).

120. Extension aux fonctions sommables. — Soient $f(x)$ une fonction sommable dans l'intervalle (0, 1) et x un point INTÉRIEUR à cet intervalle. Considérons le polynome en x

$$P_n = \frac{1}{k_n}\int_0^1 f(u)\,[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini, ce polynome jouira des propriétés suivantes :

THÉORÈME I. — *La dérivée* P'_n *converge vers* $f'(x)$ *en tout point où cette dérivée existe.*

En effet, on voit, par le même raisonnement que ci-dessus (n° 118), que la limite de P'_n est la même que celle de

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,D\,(1-u^2)^n\,du.$$

Si $f'(x)$ existe, on a dans cette intégrale, ω étant aussi petit qu'on veut avec u donc avec ε,

$$f(u+x) = f(x) + uf'(x) + \omega u.$$

Mais, comme $f(x) + uf'(x)$ est un polynome $\varphi(u)$ auquel s'applique le calcul fait au n° 118, l'intégrale

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(u)\,D\,(1-u^2)^n\,du$$

tend, sans difficulté, vers $\varphi'(0) = f'(x)$. Il suffit donc de prouver que l'intégrale restante :

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega u\,D\,(1-u^2)^n\,du,$$

est aussi petite qu'on veut avec ω quelque soit n. C'est ce qu'il est facile de voir, car, si $|\omega|$ est inférieur à ω' fixe, cette intégrale est moindre en valeur absolue que

$$\frac{\omega'}{k_n}\int_{-1}^{+1} |u\, \mathrm{D}\,(1-u^2)^n|\, du = -\frac{2\,\omega'}{k_n}\int_0^1 u\, \mathrm{D}\,(1-u^2)^n\, du = \omega'.$$

II. Théorème de M. F. Riesz. — *Le polynome* P_n *converge vers* $f(x)$ *en tout point où* $f(x)$ *est la dérivée de son intégrale indéfinie, donc presque partout.*

On voit, par le même raisonnement qu'au n° 118 que la limite de P_n est la même que celle de

$$\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(u+x)\,(1-u^2)^n\, du.$$

Intégrons par parties et faisons porter l'intégration sur f, dont nous désignerons l'intégrale par F. Comme les termes aux limites tendent vers 0, la limite de l'intégrale précédente sera celle de

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{F}\,(u+x)\,\mathrm{D}\,(1-u^2)^n\, du.$$

C'est l'intégrale considérée dans la démonstration précédente ; elle a donc pour limite $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ en tout point où f est la dérivée de F.

Théorème III. — *La dérivée d'ordre quelconque* $\mathrm{D}^r\,\mathrm{P}_n$ *converge vers la dérivée du même ordre de* f *en tout point où celle-ci existe.*

Comme ci-dessus (n° 118), cette limite sera la même que celle de

$$\frac{(-1)^r}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,\mathrm{D}^r\,(1-u^2)^n\, du.$$

Si $\mathrm{D}^r f(x)$ existe au point x, $\mathrm{D}^{r-1} f$ est *bornée* et (par conséquent) $\mathrm{D}^{r-2} f$ est *absolument continue* dans l'intervalle $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ suffisamment petit. Toutes les intégrations par parties de la démonstration du n° 118 sont permises sauf la dernière. La limite sera celle de l'intégrale

$$-\frac{1}{k_n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{(r-1)}\,(u+x)\,\mathrm{D}\,(1-u^2)^n\, du,$$

et cette limite est la dérivée $f^{(r)}(x)$ supposée existante, en vertu de la démonstration du théorème I.

Remarque. — On montre d'ailleurs, comme précédemment, que la convergence est uniforme dans tout intervalle intérieur à un intervalle de continuité de $f(x)$ et des dérivées considérées.

121. Représentation approchée des fonctions continues d'une variable par des polynomes. — Les propriétés du polynome P_n étudiées au nº 118 prouvent déjà que l'on peut construire un polynome qui, pour n infiniment grand, converge uniformément vers une fonction $f(x)$, et dont les dérivées convergent uniformément vers celles de $f(x)$, dans tout intervalle *intérieur* à un intervalle de continuité de $f(x)$ ou de ses dérivées. On peut aller plus loin et étendre l'uniformité de la convergence à l'intervalle de continuité tout entier comme nous allons le montrer.

Supposons que $f(x)$ soit continue ainsi que ses p premières dérivées dans un intervalle (a', b'). Définissons $f_1(x)$ comme égale à $f(x)$ dans l'intervalle (a', b'), mais comme égale, respectivement pour $x < a'$ et $x > b'$, à chacun des deux polynomes :

$$f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^p}{p\,!} f^{(p)}(a),$$

$$f(b) + \frac{x-b}{1} f'(b) + \cdots + \frac{(x-b)^p}{p\,!} f^{(p)}(b).$$

Cette fonction f_1 et ses p premières dérivées seront continues dans un intervalle (a, b) arbitrairement choisi et débordant (a', b').

Construisons le polynome P_n qui représente f_1 dans (a, b) et appliquons les deux théorèmes du nº 118. Si n tend vers l'infini, P_n et ses p premières dérivées respectivement convergent uniformément vers f et ses p premières dérivées, dans l'intervalle (a', b') de continuité de f et de ses dérivées.

Supposons enfin que $f(x)$ et toutes ses dérivées soient continues dans un intervalle (a, b). Donnons-nous une suite positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers zéro. Nous venons de prouver que, quel que soit n, on peut définir un polynome Q_n tel que la différence $Q_n - f$ et ses n premières dérivées soient en valeur absolue $< \varepsilon_n$ dans l'intervalle (a, b). D'où la conclusion suivante :

Théorème. — *Si la fonction f est continue dans l'intervalle fini* (a, b), *on peut définir un polynome* Q_n *qui, pour n infiniment grand, converge uniformément vers f dans cet intervalle entier, et dont les dérivées successives convergent aussi uniformément vers celles de f tant que ces dernières sont continues dans l'intervalle* (a, b).

122. Séries de polynomes. — En utilisant la remarque faite au nº 116, le théorème précédent revient à celui-ci :

THÉORÈME. — *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle fini (a, b), on peut construire une série de polynomes qui converge uniformément vers f dans cet intervalle, et qui est telle que les séries dérivées d'ordre quelconque convergent uniformément vers les dérivées du même ordre de f, tant que ces dernières sont continues dans l'intervalle (a, b).*

§ 2. Approximation par des polynomes des fonctions continues de plusieurs variables.

Nous étudierons seulement les fonctions $f(x, y)$ de deux variables, mais les conclusions s'étendent d'elles-mêmes au cas général.

123. Définition du polynome approximatif. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et de y dans un domaine D limité par une courbe C (n° 1). Nous supposerons ce domaine intérieur au rectangle borné par les coordonnées de valeurs 0 et 1. Si cette condition n'avait pas lieu, on la réaliserait en effectuant une substitution linéaire sur x et une autre sur y et nos conclusions n'en seraient pas altérées.

Nous définissons un polynome approximatif de $f(x, y)$ de degré $4n$ par l'intégrale double, où k_n a le même sens que précédemment (n° 116),

$$(7) \qquad P_n = \frac{1}{k_n^2}\iint_D f(u, v)\,[1-(u-x)^2]^n\,[1-(v-y)^2]^n\,du\,dv.$$

On peut le mettre sous une autre forme. Substituons les variables $u+x$, $v+y$ aux variables d'intégration u, v, ce qui remplace le domaine d'intégration D par un autre D_1 (qui se déduit du premier par une translation). Il vient.

$$(8) \qquad P_n = \iint_{D_1} f(u+x, v+y)\,\frac{(1-u^2)^n(1-v^2)^n}{k_n^2}\,du\,dv.$$

124. Propriétés du polynome P_n. — THÉORÈME I. — *Si x, y varient dans un domaine D′ intérieur à D au sens étroit* [1], *le polynome P_n converge uniformément vers $f(x, y)$ quand n tend vers l'infini.*

Soit ε un nombre positif, inférieur à la plus courte distance des domaines D et D′. Si u ou v varie en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, on a

$$\frac{(1-u^2)^n(1-v^2)^n}{k_n^2} < \frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}.$$

[1] C'est à dire que les frontières des deux domaines ne se touchent pas.

Comme dans le cas d'une variable, les portions correspondantes de l'intégrale (8) tendent uniformément vers 0 La limite de P_n sera la même que celle de l'intégrale restante

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du \frac{(1-u^2)^n}{k_n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y) \frac{(1-v^2)^n}{k_n} dv,$$

dont tous les éléments appartiennent effectivement à P_n sous la condition imposée à ε.

Mais, par le théorème I du nº 118, qui s'applique à l'intégrale (3) de ce nº comme à P_n, et par la remarque du nº 119, l'intégrale intérieure, qui est du type (3), est une expression de la forme

$$f(u+x, y) + \omega_n$$

où ω_n tend *uniformément* vers zéro quand n tend vers l'infini. Substituant cette expression dans l'intégrale double, elle se décompose en deux termes, dont le second tend uniformément vers 0 avec ω_n en vertu du théorème de la moyenne. Il vient donc

$$\lim P_n = \lim \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, y) \frac{(1-u^2)^n}{k_n} du.$$

Enfin on voit que cette limite est $f(x, y)$ en appliquant derechef à cette intégrale du type (3) le théorème I du nº 118 ; et la convergence est uniforme par la remarque du nº 119.

THÉORÈME II. — *Les dérivées partielles successives de* P_n *convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de* f *dans tout domaine* D', *intérieur au domaine* D *et à un domaine dans lequel ces dernières dérivées sont continues.*

Supposons que $D_x^p D_y^q f$ soit continue dans un domaine D'' (compris dans D et comprenant D') et désignons par ε la plus courte distance des contours de D' et de D''. En dérivant la formule (7) on a, sans difficulté,

$$\frac{\partial^{p+q} P_n}{\partial x^p \, \partial y^q} = \iint_D f(u, v) \frac{D_x^p [1-(u-x)^2]^n \, D_y^q [1-(v-y)^2]^n}{k_n^2} du\, dv.$$

Mais on peut remplacer D_x par $-D_u$ et D_y par $-D_v$, puis substituer les variables $u+x$, $v+y$ aux variables d'intégration u, v, ce qui translate le domaine d'intégration en D_1. L'intégrale précédente devient ainsi

$$(-1)^{p+q} \iint_{D_1} f(u+x, v+y) \frac{D^p (1-u^2)^n \, D^q (1-v^2)^n}{k_n^2} du\, dv.$$

Encore une fois, si u ou v varie en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, le facteur

$$\frac{D^p(1-u^2)^n D^q(1-v^2)^n}{k_n^2}$$

tend uniformément vers zéro. Les portions correspondantes de l'intégrale double peuvent être négligées : la limite de la dérivée partielle considérée de P_n sera la même que celle de l'intégrale restante

$$(-1)^p \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{D^p(1-u^2)^n}{k_n} du \, (-1)^q \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y) \frac{D^q(1-v^2)^n}{k_n} dv.$$

Il n'y a plus qu'à appliquer deux fois de suite le théorème II du nº 118, pour obtenir

$$\lim D_x^p D_y^q P_n = D_x^p D_y^q f;$$

et la convergence sera uniforme en vertu de la remarque du nº 119.

125. Approximation et représentation analytique des fonctions. — THÉORÈME I. — *Etant donnée une fonction $f(x, y)$ continue dans un domaine* D, *on peut définir, en fonction de n, un polynome,* P_n, *en x, y, qui, pour n infiniment grand, converge uniformément vers $f(x, y)$ dans tout domaine intérieur à* D, *et dont les dérivées partielles convergent aussi uniformément vers celles de f dans tout domaine* D' *intérieur* à D *et à un autre domaine dans lequel ces dérivées de f sont continues.*

THÉORÈME II. — *Sous les mêmes conditions, on peut définir une série de polynome qui converge uniformément vers $f(x, y)$ et dont les dérivées partielles convergent uniformément vers celles de $f(x, y)$.*

126. Extension aux fonctions sommables. — THÉORÈME DE M. L. TONELLI (1). *Soit $f(x, y)$ une fonction sommable dans le carré borné aux intervalles* (0, 1) *; le polynome en x, y*

$$P_n = \frac{1}{k_n^2} \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) \left[1-(u-x)^2\right]^n \left[1-(v-y)^2\right]^n du \, dv.$$

converge vers $f(x, y)$ pour PRESQUE *tous les points du carré quand n tend vers l'infini.*

Soit x, y un point intérieur au carré. On ramène comme précédemment cette limite à celle de l'intégrale

(1) *Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t.* XXIX. L'intégrale considérée par M. Tonelli n'est pas celle du théorème énoncé, mais lui est équivalente. Elle définit un polynome de degré moitié moindre, mais elle aurait, pour nous, l'inconvénient d'exiger de nouveaux calculs.

$$\frac{1}{k_n^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x, v+y)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Comme d'ailleurs l'intégrale ci-dessous :

$$\frac{1}{k_n^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x, y)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv,$$

tend vers $f(x, y)$, il suffit de montrer que la différence des deux tend vers zéro. Posons, pour simplifier,

$$\varphi\,(u, v) = f(x+u, y+v) - f(x, y)\,;$$

la différence des deux intégrales se décompose comme il suit dans la somme de quatre intégrales (dues aux quatre combinaisons des signes $\pm$) :

$$\Sigma\,\frac{1}{k_n^2}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\varphi\,(\pm u,\ \pm v)\,(1-u^2)^n\,(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Nous allons montrer que *cette somme tend vers* 0, *donc que* P_n *tend vers* f, *en tout point* x, y *tel que la dérivée de l'intégrale indéfinie en* u, v :

$$\iint |\,\varphi\,(u, v)\,|\,du\,dv,$$

soit nulle au point $u = v = 0$. Comme cette condition se réalisera en tout point où $|\,f(x, y) - c\,|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie quelque soit c, donc *presque* partout (nº 102), le théorème de M. Tonelli sera établi. Pour que la dérivée en question soit nulle au point $u = v = 0$, il faut que chacun des quatre rapports (dus aux combinaisons des signes $\pm$) :

$$\frac{1}{u^2}\int_0^{u}\int_0^{u}|\,\varphi\,(\pm u,\ \pm v)\,|\,du\,dv,$$

tende vers 0 avec u. Nous supposerons qu'il en est ainsi.

Il suffira d'ailleurs de prouver que le premier des termes de la somme Σ tend vers 0, car la démonstration se fait de la même façon pour les trois suivants. Considérons donc ce terme. Sa valeur absolue est moindre que l'expression

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^{\varepsilon}(1-u^2)^n\,du\int_0^{\varepsilon}|\,\varphi\,(u, v)\,|\,(1-v^2)^n\,dv.$$

Effectuons sur l'intégrale intérieure une intégration par parties ; en posant, pour simplifier,

$$\Phi_1\,(u, v) = \int_0^{v}|\,\varphi\,(u, v)\,|\,dv,$$

il vient

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}\int_0^{\varepsilon}\Phi_1\,(u, \varepsilon)\,(1-u^2)^n\,du$$
$$-\frac{1}{k_n^2}\int_0^{\varepsilon}(1-u^2)^n\,du\int_0^{\varepsilon}\Phi_1\,(u, v)\,D\,(1-v^2)^n\,dv.$$

On voit que le premier terme tend vers 0 avec le facteur placé devant l'intégrale. Il suffit de prouver que le second tend vers 0. Celui-ci devient, au signe près, en renversant les intégrations,

$$\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon D\,(1-v^2)^n\,dv\int_0^\varepsilon \Phi_1(u,v)\,(1-u^2)^n\,du.$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties ; en posant, pour simplifier,

$$\Phi_2(u,v)=\int_0^u \Phi_1(u,v)\,du=\int_0^u du\int_0^v |\,\varphi(u,v)\,|\,dv,$$

il vient

$$\frac{(1-\varepsilon^2)^n}{k_n^2}\int_0^\varepsilon \Phi_2(\varepsilon,v)\,D\,(1-v^2)^n\,dv$$
$$-\frac{1}{k_n^2}\int_0^\varepsilon\int_0^\varepsilon \Phi_2(u,v)\,D\,(1-u^2)^n\,D\,(1-v^2)^n\,du\,dv.$$

Comme ci-dessus, le premier terme a pour limite zéro. Dans le second, on a, ω étant aussi petit que l'on veut avec u et v (donc avec ε), puisque la dérivée de l'intégrale est nulle,

$$\Phi_2(u,v)<\int_0^{\sqrt{u^2+v^2}}\int_0^{\sqrt{u^2+v^2}} |\,\varphi\,|\,du\,dv<\omega\,(u^2+v^2)\;;$$

donc ce second terme est aussi petit qu'on veut avec ω quel que soit n, car il est moindre que

$$\frac{\omega}{k_n^2}\int_0^1\int_0^1 (u^2-v^2)\;|\;D(1-v^2)^n\,D\,(1-u^2)^n\,|\;du\,dv,$$

c'est-à-dire (ces dérivées étant négatives et l'une des intégrations s'effectuant après décomposition) que

$$-\frac{2\omega}{k_n^2}\int_0^1 u^2 D\,(1-u^2)^n\,du=\frac{2\omega}{n\,k_n^2}<\frac{2\omega}{\pi}\,\frac{n+1}{n}.$$

La proposition est établie.

§ 3. Séries de Fourier. Conditions nécessaires et suffisantes de convergence.

127. Séries trigonométriques. Formules d'Euler. — On appelle *série trigonométrique* une série de la forme

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

où x désigne une variable et a, b des coefficients constants. Si cette série converge, elle représente une fonction de période 2π.

C'est EULER en 1733 qui a posé la question de savoir si une fonction $f(x)$, arbitrairement donnée, mais de période 2π, peut être représentée par un développement de cette forme et c'est lui encore qui a trouvé les formules classiques pour la détermination des coefficients. Voici d'ailleurs à peu près comment il procède pour effectuer le développement de la fonction donnée $f(x)$.

Posons *a priori*

$$(2) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma\,(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients. A cet effet, multiplions les deux membres par $\cos nx\,dx$ et intégrons terme à terme de 0 à 2π ; opérons de même en multipliant par $\sin nx\,dx$; nous trouvons les *formules d'Euler* ou *de Fourier* :

$$(3) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En effet, les intégrales de $\cos mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$, $\cos mx \sin nx$ entre 0 et 2π sont nulles si m est différent de n, tandis que, si $m = n$, la dernière seule est nulle et les deux premières égales à π (*t.* I, nº 246).

Mais il importe d'observer tout de suite que ce raisonnement postule 1º) la possibilité du développement, 2º) la légimité de l'intégration terme à terme. Il ne prouve donc rien, tant que ces deux démonstrations n'ont pas été faites. Aussi importe-t-il d'abord de bien préciser les questions que nous allons traiter.

128. Séries et constantes de Fourier. Problèmes qu'elles soulèvent. — Soit $f(x)$ une fonction susceptible d'intégration. Les constantes a_m et b_m déterminées par les formules (3) s'appellent les *constantes de Fourier* de $f(x)$; la série trigonométrique (1) formée avec ces constantes comme coefficients et considérée au point de vue purement formel (qu'elle soit convergente ou non), s'appelle *la série de Fourier de* $f(x)$. Alors on se pose les questions suivantes :

La série de Fourier de $f(x)$ est-elle convergente ?

Si elle converge, a-t-elle pour somme $f(x)$?

Converge-t-elle *uniformément* ?

La fonction $f(x)$ peut-elle admettre un développement trigonométrique autre que celui de Fourier ?

Ces questions ont donné lieu à une foule de travaux intéressants dont nous allons exposer les principaux résultats. Aucune d'elles cependant ne peut encore être considérée comme complètement résolue.

129. Hypothèses sur $f(x)$. — La fonction $f(x)$ dont nous allons étudier le développement sera, jusqu'à la fin du chapitre, soumise aux deux conditions suivantes : 1° c'est une fonction *périodique* de période 2π ; 2° elle est *absolument intégrable*. On pourra lire tout le grand texte en entendant par là que f et $|f|$ admettent une intégrale (ou une intégrale généralisée) au sens élémentaire. Mais toute la théorie suppose seulement que f soit *sommable* au sens de M. Lebesgue et les quelques compléments nécessaires pour le justifier se trouveront dans le petit texte.

130. Sommation de la série de Fourier de $f(x)$ à l'aide de l'intégrale de Dirichlet. — Soit donc $f(x)$ une fonction *absolument intégrable* [1] de période 2π. Ses constantes de Fourier sont bien déterminées par les intégrales existantes :

$$(4) \qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

D'ailleurs, par suite de la périodicité de la fonction sous le signe, on peut remplacer l'intervalle d'intégration par tout autre de même amplitude 2π. On a ainsi, en particulier,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x-\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

Soit S_m la somme,

$$S_m = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

des $m+1$ premiers termes de la série de Fourier de f. Elle devient, par la substitution des valeurs précédentes des coefficients,

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos k(\alpha - x)\right] f(\alpha)\, d\alpha\,;$$

ou encore, en remplaçant la variable d'intégration α par $\alpha + x$,

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos k\alpha\right] f(\alpha + x)\, d\alpha.$$

(1) Donc, généralement, *sommable*.

Mais, en sommant les m équations :

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha = 2\cos k\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha,$$

pour $k = 1, 2, \ldots m$, puis divisant par $\sin\frac{1}{2}\alpha$, on trouve

$$(5)\qquad \frac{1}{2}+\sum_1^m \cos k\alpha = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Enfin, en substituant ce résultat dans la valeur de S_m, on exprime S_m par l'intégrale suivante, connue sous le nom d'intégrale de Dirichlet :

$$(6)\qquad S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

La convergence de la série de Fourier revient donc à celle de cette intégrale quand l'entier m tend vers l'infini.

Dans l'étude de cette limite, le théorème suivant, dont la démonstration générale est due à M. Lebesgue, est tout à fait fondamental.

131. Limite pour $k=\infty$ de $\int F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha$. — Théorème. *Si la fonction* $F(\alpha)$ *est absolument intégrable* [1], *les deux intégrales :*

$$\int_a^b F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,\qquad \int_a^b F(\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha,$$

tendent vers 0 *quand* k *tend vers l'infini d'une manière quelconque.*

En particulier, les constantes de Fourier a_m *et* b_m *d'une fonction* $f(x)$ ***tendent vers* 0 *quand* m *tend vers l'infini.***

Il suffit de prouver le théorème pour la première des deux intégrales, le raisonnement étant le même pour l'autre.

Premier cas. — *Si* $F(\alpha)$ *est continue dans l'intervalle* (a, b), cette première intégrale ne diffère de chacune des deux suivantes :

$$\int_{a+\frac{\pi}{k}}^{b}\quad\text{et}\quad\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha$$

que par des intégrales infiniment petites avec l'intervalle d'intégra-

[1] En général sommable (n° 129).

tion. Il suffit donc de montrer que la somme de ces deux-ci tend vers 0. Or cette somme, après la substitution de $\alpha + \frac{\pi}{k}$ à α dans son premier terme, s'écrit

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} \left[F(\alpha) - F\left(\alpha + \frac{\pi}{k}\right) \right] \sin k\alpha \, d\alpha.$$

Quand k tend vers l'infini, la différence entre crochets tend uniformément vers 0, donc l'intégrale tend vers 0.

Deuxième cas. — *Si* $F(\alpha)$ *est discontinue en un nombre limité de points*, on peut admettre que ce soit aux extrémités a et b seulement, car l'intégrale considérée peut se décomposer en plusieurs autres satisfaisant à cette condition.

Ceci entendu, il suffit, ce qui ramène au premier cas, de démontrer le théorème pour la seconde des deux intégrales :

$$\int_a^b F(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha, \qquad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha.$$

En effet, leur différence est moindre que celles des deux intégrales de $|F| \, d\alpha$ prises respectivement entre les mêmes limites : elle est donc aussi petite qu'on veut avec ε.

Troisième cas. — *Soit* $F(\alpha)$ *sommable* (au sens de M. Lebesgue). Il suffit de faire la démonstration pour F *bornée et positive*, car toute fonction sommable est la différence de deux fonctions sommables positives. Ensuite, si F est positive et non bornée, l'intégrale de F est, par définition, la limite de celle d'une fonction bornée $F_n \leqq F$. Or la différeuce des deux intégrales

$$\int F \sin k\alpha \, d\alpha, \qquad \int F_n \sin k\alpha \, d\alpha,$$

est inférieure à $\int (F - F_n) \, d\alpha$, donc aussi petite que l'on veut : il suffit de démontrer le théorème pour la seconde intégrale.

Ceci posé, soit F positive et ayant pour borne M. Ce cas se ramène à celui de F *continue* par le théorème du n° 93. En effet, F étant égale à une fonction continue φ à moins de ε près sauf dans un ensemble de mesure $< \omega$, et φ étant d'ailleurs positive et $< M$ d'après la démonstration du n° 93, la différence entre les deux intégrales :

$$\int_a^b F \sin k\alpha \, d\alpha, \qquad \int_a^b \varphi \sin k\alpha \, d\alpha,$$

est inférieure à $\varepsilon(b - a) + M\omega$, donc aussi petite qu'on veut avec ε et ω. On est ramené à démontrer le théorème par la seconde intégrale, et celle-ci rentre dans le premier cas.

132. Convergence uniforme de l'intégrale précédente. — 1° Dans l'intégrale du théorème précédent, considérons les limites a et b comme variables, mais dans un intervalle fixe (A, B) dans lequel $|F|$ est intégrable. Alors l'intégrale du théorème varie moins rapidement que l'intégrale, fonction continue de a, b et indépendante de k,

$$\int_a^b |F| \, d\alpha.$$

Donc l'intégrale du théorème est fonction *uniformément continue de* (a, b) : *elle tend donc uniformément vers* 0 *quand* k *tend vers l'infini*, puisqu'elle tend vers 0 pour tout système particulier a, b.

2° Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_a^b F(\alpha + x) \sin k\alpha \, d\alpha,$$

qui dépend de x variable, mais de telle façon que la variable $t = \alpha + x$ ne sorte pas d'un intervalle (A, B) où $|F(t)|$ est intégrable. Par la substitution de $\alpha - x$ à α, cette intégrale se décompose en deux autres, multipliées par des facteurs < 1,

$$\cos kx \int_{a-x}^{b-x} F(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha - \sin kx \int_{a-x}^{b-x} F(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha,$$

auxquelles s'applique le raisonnement précédent. Donc *elle converge encore uniformément vers* 0 *pour* k *infini.*

3° Considérons enfin l'intégrale plus générale :

$$\int_a^b F(\alpha + x) \varpi(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha,$$

où nous supposerons que $\varpi(\alpha)$ admet une dérivée continue $\varpi'(\alpha)$. Dans les mêmes conditions que la précédente, *elle tend uniformément vers* 0 *quand* k *tend vers l'infini.*

Posons, en effet,

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha F(\alpha + x) \sin k\alpha \, d\alpha ;$$

cette intégrale devient, par intégration par parties,

$$\Phi(b) \varpi(b) - \int_a^b \Phi(\alpha) \varpi'(\alpha) \, d\alpha,$$

et elle tend uniformément vers zéro avec Φ, auquel s'applique la démonstration précédente.

Il peut se faire que $\varpi(\alpha)$ dépende de k. La démonstration précédente subsiste alors sous la condition que ϖ et ϖ' restent bornés quand k tend vers l'infini.

133. Théorème de Riemann. — *La manière dont se comporte la série de Fourier de $f(x)$ au point x ne dépend que de la nature de $f(x)$ dans le voisinage du point x.*

En effet, si nous désignons par $\varpi(\alpha)$ la fonction $1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$, qui est continue ainsi que sa dérivée dans les intervalles $(-\pi, -\varepsilon)$ et (ε, π) quelque petit que soit ε positif, l'intégrale (6), qui exprime S_m (n° 130), devient

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\varpi(\alpha)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\,d\alpha.$$

Donc, en négligeant deux portions de cette intégrale qui tendent uniformément vers zéro quand m tend vers l'infini (n° 132), on voit que cette intégrale converge vers la même limite et de la même manière (uniforme ou non) que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

134. Forme préliminaire de la condition nécessaire et suffisante de convergence. — Nous allons chercher la condition pour que la série de Fourier converge vers une limite déterminée S. Ainsi S est une quantité indépendante de m mais fonction de x. Multiplions par S la relation

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha,$$

qui s'obtient en intégrant les deux membres de la formule (5) du n° 130 ; puis soustrayons-la de l'equation (6) du même numéro. Il vient

$$(7) \qquad S_m - S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha) - S]\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha.$$

Donc, *pour que la série de Fourier converge vers S, il faut et il suffit que, m croissant, l'intégrale* (7) *devienne définitivement inférieure en valeur absolue à tout nombre positif ω donné d'avance, à partir d'une valeur correspondante M suffisamment grande de m. Celle-ci d'ailleurs devra être indépendante de x pour que la convergence soit uniforme.*

Mais, dans cet énoncé, nous allons successivement remplacer l'intégrale (7) par d'autres plus simples. D'abord par

$$(8) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+\alpha)-S] \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha \frac{d\alpha}{\alpha},$$

ce qui est permis, parce que la différence des deux intégrales tend uniformément vers 0 en vertu des conclusions du n° 132. Cette différence est, en effet, de la forme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x+\alpha) \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha \left[\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\alpha}\right] d\alpha$$

où le crochet est une fonction $\varpi(\alpha)$ continue ainsi que sa dérivée. En second lieu, on peut remplacer l'intégrale (8) par la suivante, où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais indépendant de m,

$$(9) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+\alpha)-S] \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha \frac{d\alpha}{\alpha},$$

car on néglige seulement deux portions de l'intégrale (8) qui tendent uniformément vers zéro quand m tend vers l'infini.

Partageons l'intégrale (9) en deux autres aux limites $-\varepsilon$ et 0, 0 et ε; ramenons la première aux mêmes limites que la seconde par le changement de signe de α; l'intégrale (9) sera remplacée par l'intégrale (11) de la règle suivante, que nous sommes maintenant en droit d'énoncer.

135. Règle de convergence. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier de $f(x)$ converge (uniformément) vers S est que, quelque petit que soit le nombre positif donné ω, on puisse lui faire correspondre deux nombres ε et M (indépendants de x) tels qu'en posant*

$$(10) \qquad \varphi(\alpha) = f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2S,$$

l'intégrale

$$(11) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(\alpha) \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha \frac{d\alpha}{\alpha}$$

soit de module $< \omega$ pour tout entier $m >$ M.

Remarque. Dans cette règle, *on peut laisser tomber la condition que m soit entier*. En effet, si l'on remplace m par $m+\theta$ $(0<\theta<1)$ dans l'intégrale précédente et qu'on fasse la différence, on trouve, après avoir transformé $\sin\left(m+\theta+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha$ en produit,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha)\frac{\sin\frac{\theta\alpha}{2}}{\alpha}\cos\left(m+\frac{\theta+1}{2}\right)\alpha\, d\alpha.$$

Donc cette différence tend uniformément vers 0 pour m infini d'après les conclusions du nº 132.

Posons, en vue de simplifier l'écriture, $m+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{\delta}$, δ tendant vers 0 quand m tend vers l'infini, nous pouvons encore énoncer la règle précédente comme il suit :

Second énoncé de la règle. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier de $f(x)$ converge (uniformément) vers* S *est que, quel que soit ω positif, on puisse lui faire correspondre deux nombres positifs ε et δ_1 (indépendants de x) tels que l'intégrale*

$$(12) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\frac{d\alpha}{\alpha}$$

soit de module $<\omega$ pour toute valeur positive de δ inférieure à δ_1.

136. Modification de cette règle au cas où $\Phi'(0)=0$. — Posons

$$\Phi(\alpha)=\int_0^\alpha |\varphi(\alpha)|\, d\alpha\,;$$

et supposons que $\Phi'(\alpha):\alpha$ tende (uniformément) vers zéro, donc que $\Phi'(0)=0$. Cette condition sera d'ailleurs toujours réalisée en un point (dans un intervalle intérieur à un autre) où $f(x)$ est continue, car on pose, dans ce cas, $S=f(x)$ comme on le dira plus loin (nº 138).

Théorème. — *Sous cette condition, et δ étant supposé $<\varepsilon$, on peut remplacer, dans le second énoncé de la règle précédente, l'intégrale* (12) *par l'une des deux suivantes* :

$$(13) \quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^\varepsilon \varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\frac{d\alpha}{\alpha}, \qquad (14) \quad \frac{1}{\pi}\int_\delta^\varepsilon \frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\, d\alpha.$$

En effet, on passe de (12) à (13) en négligeant une intégrale inférieure à la suivante, qui, par hypothèse, tend (uniformément) vers 0 avec δ,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta |\varphi(\alpha)|\frac{\pi}{\delta}\, d\alpha=\frac{\Phi(\delta)}{\delta}.$$

Il suffit donc de justifier le passage de (13) à (14). Changeons dans (13) α en $\alpha+\delta$ et décomposons (13) en trois autres intégrales ; il vient successivement

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon-\delta}\frac{\varphi(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\, d\alpha=-\frac{1}{\pi}\int_\delta^\varepsilon+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon-\delta}^\varepsilon-\frac{1}{\pi}\int_0^\delta$$

La dernière intégrale, étendue à $(0, \delta)$, a son élément de module $< |\varphi(\alpha+\delta)| : \delta$. Elle est elle-même de module $< \Phi(2\delta) : \delta$ et tend (uniformément) vers 0 avec δ. La précédente tend aussi vers 0 par les théorèmes des nos 131-132. En les négligeant, l'intégrale (13) revient à la première seule. On peut donc ajouter celle-ci à (13), c'est-à-dire remplacer (13) par l'intégrale

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left(\frac{\varphi(\alpha+\delta)}{\alpha+\delta}-\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\right)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\,d\alpha.$$

Il reste à montrer que l'on peut remplacer celle-ci à son tour par (14) ; et, à cet effet, nous allons prouver que la somme des deux vérifie les conditions imposées à (12) dans l'énoncé de la règle en question.

Cette somme est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}|\varphi(\alpha+\delta)|\frac{d\alpha}{\alpha(\alpha+\delta)} < \frac{\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}|\varphi(\alpha+\delta)|\frac{d\alpha}{\alpha^2},$$

et *a fortiori* à la limite suivante, obtenue par intégration par parties, puis suppression d'un terme intégré négatif :

$$\frac{\delta}{\pi}\,\frac{\Phi(\varepsilon+\delta)}{\varepsilon^2}+\frac{2\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\Phi(\alpha+\delta)\frac{d\alpha}{\alpha^3}\cdot$$

Le terme intégré tend uniformément vers 0 avec δ. D'autre part, dans cette dernière intégrale, α étant $> \delta$, on peut poser, ω tendant (uniformément) vers 0 avec ε,

$$\Phi(\alpha+\delta) < \omega(\alpha+\delta) < 2\omega\alpha.$$

Cette intégrale est donc moindre que

$$\frac{4\omega\delta}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha^2} < 4\frac{\omega}{\pi},$$

quantité aussi petite qu'on veut avec ω (donc avec ε) quel que soit δ.

Généralisation du théorème précédent. — *Toujours sous la même condition, on peut aussi, dans le second énoncé du n° précédent, remplacer l'intégrale (12) par n'importe laquelle des suivantes :*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\Delta^n\varphi(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{\delta}\,\frac{d\alpha}{\alpha} \qquad (n=1, 2, 3,\ldots)$$

Ici $\Delta^n\varphi$ désigne la différence n^{ieme} de $\varphi(\alpha)$ quand on donne à α une suite d'accroissements δ. Ainsi :

$$\Delta\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha),\ldots \qquad \Delta^n\varphi(\alpha)=\Delta^{n-1}\varphi(\alpha+\delta)-\Delta^{n-1}\varphi(\alpha),\ldots$$

En effet, on passe de (13) à (14) en démontrant qu'il est permis de remplacer, dans (13), $\varphi(\alpha)$ par sa différence. Or on peut reproduire une démonstration toute semblable pour passer d'une différence d'ordre quelconque à la suivante. On observe, à cette fin, que $\Delta^n\varphi(\alpha)$ est une somme

de termes de la forme $\varphi(\alpha + k\delta)$ et possède (α étant $> \delta$) les propriétés de φ qui ont été utilisées pour faire ce passage.

§ 4. Criteriums classiques de convergence des séries de Fourier.

Donnons d'abord quelques définitions générales :

137. Points de discontinuité de 1re espèce. Points réguliers. Fonctions à variation bornée. — Nous disons, avec M. Lebesgue, que le point x_0 est un *point de discontinuité de première espèce* de $f(x)$ si cette fonction a une limite finie $f(x_0 - 0)$ quand x tend vers x_0 en croissant, et une autre $f(x_0 + 0)$ quand x tend vers x_0 en décroissant. Si ces deux limites étaient égales, la fonction serait continue au point x_0.

Nous dirons encore, avec M. Lebesgue, que le point x_0 est un *point régulier* si $f(x_0 - 0)$ et $f(x_0 + 0)$ existent et que $f(x_0)$ soit leur moyenne arithmétique. En particulier, tout point où f est continue est régulier.

Les points de discontinuité d'une fonction bornée non décroissante (ou non croissante) sont toujours de première espèce, en vertu d'un principe général de la théorie des limites (*t.* I, nº 16).

Une fonction à variation bornée [1] est, par définition, la différence de deux fonctions φ et ψ bornées et non décroissantes. Elle ne peut donc avoir que des points de discontinuité de première espèce.

Une fonction *continue* à variation bornée dans un intervalle (a, b) est aussi, dans cet intervalle, la différence de deux fonctions φ et ψ *continues* et non décroissantes [2]. En effet, si φ et ψ n'étaient pas continues, leurs oscillations seraient les mêmes en chaque point de discontinuité. Appelons alors ω la somme de ces oscillations en tous les points de discontinuité entre a et x, à droite de a et à gauche de x; les fonctions $\varphi - \omega$ et $\psi - \omega$ seraient continues et non décroissantes. On les substituerait aux deux premières et la différence ne serait pas changée.

Dirichlet, qui a traité le premier rigoureusement la théorie des séries de Fourier, a considéré des fonctions bornées n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima. Ce sont les fonctions qui satisfont aux *conditions de Dirichlet*. Elles sont évidemment à variation bornée.

(1) L'étude des fonctions à variation bornée a été faite d'une manière approfondie dans le tome I, Chap. IX, § 3.

(2) Cf. *t.* I, nº 351. 6º.

138. Choix de S. — Pour les fonctions dont nous venons de parler, on peut choisir la définition de la quantité S qui entre dans la définition de $\varphi(\alpha)$, à savoir

$$\varphi(\alpha) = f(x+\alpha) + f(x-\alpha) - 2\,S,$$

de manière que $\varphi(\alpha)$ tende vers 0 avec α. Il doit être entendu que S reçoit alors cette valeur.

Ainsi, si la fonction est *continue*, ou régulière au point x, on fait $S = f(x)$; si x est un point de discontinuité de première espèce, on fait

$$S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

139. Premier criterium de convergence (Dini). — *La série de Fourier de $f(x)$ converge vers $f(x)$ en tout point régulier tel que l'intégrale*

$$\int_0^{\varepsilon} |\,\varphi(\alpha)\,|\,\frac{d\alpha}{\alpha}$$

existe.

C'est la conséquence de la règle du nº 135. Quel que soit ω positif, on peut alors prendre ε assez petit pour que cette intégrale soit $< \omega$, auquel cas l'intégrale (11) l'est *a fortiori* quel que soit m. Si cette condition se réalise avec ε indépendant de x, la convergence sera uniforme.

Ce criterium donne lieu à autant de cas particulier qu'il y aura de règles d'existence pour l'intégrale. En particulier, l'intégrale existe si $\varphi(\alpha)$ est infiniment petit d'ordre $r > 0$ quand α tend vers 0.

Donc la série de Fourier converge en tout point x tel que $f(x+\alpha) - f(x)$ soit infiniment petit d'ordre $r > 0$ pour $\alpha = 0$. En particulier, toute fonction dérivable est représentable en série de Fourier.

140. Second criterium (C. Jordan). — *La série de Fourier de $f(x)$ converge dans tout intervalle, si petit soit-il, où $f(x)$ est à variation bornée. De plus, la convergence sera uniforme dans un intervalle intérieur à un intervalle de continuité. La somme S de la série sera $f(x)$ en tout point régulier; en un point de discontinuité, ce sera*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Remarquons que si f est à variation bornée, φ l'est aussi. Or, si la condition de la règle du nº 135 se vérifie pour deux fonctions, elle se

vérifiera pour leur différence. Il suffit donc de la vérifier en supposant φ positif et non décroissant. On a, dans ce cas, en remplaçant $m + \frac{1}{2}$ par k, et transformant par le second théorème de la moyenne,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha) \sin k\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\pi}\int_{\varepsilon'}^\varepsilon \frac{\sin k\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Cette quantité est de valeur absolue moindre que

$$\frac{1}{\pi} \mid \varphi(\varepsilon) \mid \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha < \mid \varphi(\varepsilon) \mid.$$

La condition de la règle se vérifiera, ω étant donné, en prenant ε assez petit pour qu'on ait

$$\mid \varphi(\varepsilon) \mid = \mid f(x+\varepsilon) - f(x+0) + f(x-\varepsilon) - f(x-0) \mid < \omega.$$

Enfin, à l'intérieur d'un intervalle de continuité de f, cette condition peut se réaliser avec un ε indépendant de x, ce qui achève la démonstration.

141. **Troisième criterium** (1). — *La série de Fourier converge vers la limite pour $\alpha = 0$ de la fonction*

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^\alpha [f(x+\alpha) + f(x-\alpha)]\, d\alpha,$$

en tout point x tel que cette fonction de α soit à variation bornée dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Soit S cette limite, toujours existante dans notre hypothèse. Substituons-la dans $\varphi(\alpha)$; la fonction *à variation bornée* :

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varphi(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [f(x+\alpha) + f(x-\alpha) - 2S]\, d\alpha$$

tend vers 0 avec α et je dis que la règle du n° 135 est applicable.

En effet, écrivons k au lieu de $m + \frac{1}{2}$ et intégrons par parties l'intégrale de l'énoncé de cette règle. Il vient

$$\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha) \sin k\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \Psi(\varepsilon) \sin k\varepsilon - \int_0^\varepsilon \Psi(\alpha)\, \alpha\, d\, \frac{\sin k\alpha}{\alpha}.$$

Soit ω positif donné. On peut prendre ε assez petit pour que le terme intégré soit $< \omega$ quel que soit k (donc m), car $\Psi(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε. Reste à montrer qu'on peut aussi réaliser cette condition pour l'intégrale.

Comme Ψ est à variation bornée, on peut, ainsi que dans le numéro

(1) Nous l'avons fait connaître dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1911.

précédent, raisonner sur Ψ' comme sur une fonction positive non décroissante. Alors, par le second théorème de la moyenne, l'intégrale revient à

$$\Psi'(\varepsilon)\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \alpha\, d\,\frac{\sin k\alpha}{\alpha} = \Psi'(\varepsilon)\left[\sin k\alpha\right]_{\varepsilon'}^{\varepsilon} - \Psi'(\varepsilon)\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon}\frac{\sin k\alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Donc, en prenant ε et, avec lui, $\Psi'(\varepsilon)$ assez petits, on rendra la valeur absolue de cette expression $< \omega$ quel que soit k.

Si $\Psi'(\varepsilon)$ tend uniformément vers 0 quand x varie, la convergence sera *uniforme*.

Il est assez facile de montrer que ce criterium contient les deux précédents. Par contre, ainsi que M. Lebesgue nous l'a fait remarquer, on pourrait le faire rentrer dans le suivant :

142. Quatrième criterium (Lebesgue). — *La série de Fourier converge (uniformément) vers $f(x)$ en tout point (dans tout intervalle intérieur à un autre) où $f(x)$ est continue, si, quel que soit ω positif, on peut lui faire correspondre deux nombres positifs ε et δ_1 (indépendants de x) tels que l'on ait, pour $\delta < \delta_1$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left|\frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\right| d\alpha < \omega.$$

Reportons-nous aux conditions du n° 136. Si f est continue, $\Phi'(0)=0$ et $\Phi'(\alpha) : \alpha$ converge (uniformément) vers 0.

L'intégrale (14) est de module moindre que celle que nous venons d'écrire, ce qui justifie notre énoncé.

Généralisation. — Si l'on utilise le second théorème du n° 136 au lieu du premier, on généralise le criterium de M. Lebesgue. On peut, en effet, remplacer l'intégrale qui figure dans son énoncé par l'intégrale plus générale :

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left|\Delta^n\varphi(\alpha)\right|\frac{d\alpha}{\alpha},$$

qui se réduit à celle de M. Lebesgue pour $n = 1$.

143. Cinquième criterium (Dini). — *La série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle intérieur à un autre où $f(x)$ est continue et où le produit*

$$\operatorname{Log}\delta\,\left|\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)\right|$$

tend uniformément vers 0 avec δ.

C'est la conséquence du criterium de M. Lebesgue n° (142). A tout ω positif correspond un δ_1 tel qu'on ait, pour $\delta < \delta_1$ et α quelconque,

$$|\operatorname{Log}\delta|\,.\,|\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)|<\omega,$$

auquel cas

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\varepsilon}\left|\frac{\varphi(\alpha+\delta)-\varphi(\alpha)}{\alpha}\right|d\alpha<\frac{\omega}{\pi\,|\operatorname{Log}\delta\,|}\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha}<\frac{\omega}{\pi}.$$

et la condition du criterium est réalisée.

Généralisation. — *La série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle intérieur à un autre où $f(x)$ est continue et où le produit*

$$\operatorname{Log}\delta.\ \Delta^n\varphi(\alpha)$$

tend uniformément vers 0 *avec* δ.

La démonstration est la même que la précédente sauf qu'on se sert de la généralisation du criterium de M. Lebesgue (nº 142).

§ 5. Exemples de développements en séries de Fourier.

144. **Cas des fonctions non périodiques. Séries de sinus et séries de cosinus.** — On peut avoir à développer une fonction non périodique dans un intervalle d'amplitude 2π, par exemple, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. On revient alors au cas de la fonction périodique par l'artifice suivant :

Soit $F(x)$ la fonction proposée. On lui substitue une fonction $f(x)$ de période 2π, définie par la condition d'être égale à $F(x)$ dans l'intervalle de $(-\pi+0, \pi)$. Le développement de $f(x)$ en série de Fourier sera celui de $F(x)$ dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

Les propriétés de $f(x)$ feront connaître la manière dont la série se comporte aux extrémités de l'intervalle. Supposons $F(x)$ et, par suite, $f(x)$ à variation bornée. Pour $x=\pi$, la somme de la série sera

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2}.$$

Donc, si F est continue, mais non périodique, les extrémités de l'intervalle se comportent exactement comme des points de discontinuité. Au contraire, si F est continue et reprend la même valeur aux points $x=\pm\pi$, la convergence sera uniforme dans tout intervalle d'après le criterium de M. C. Jordan (nº 140).

On peut aussi se proposer de développer $F(x)$ en série de cosinus (ou de sinus) seuls dans un intervalle d'amplitude π, par exemple dans $(0, \pi)$. On substitue alors à $F(x)$ une fonction $f(x)$, paire (ou impaire), de période 2π, définie par la condition d'être égale à $F(x)$

dans l'intervalle $(0, \pi)$. Le développement de $f(x)$ sera le développement cherché, car il ne contient que des cosinus si f est paire, que des sinus si f est impaire.

145. Exemples de séries de sinus. — Les coefficients b_m du développement en série de sinus sont (f étant impaire) fournis par les formules

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha\right],$$

d'où, en changeant π en $\pi - \alpha$ dans la dernière intégrale,

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) - (-1)^m f(\pi - \alpha)] \sin m\alpha\, d\alpha.$$

Premier exemple. — Soit à développer $\pi : 4$ dans l'intervalle $(0,\pi)$; on a $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$, donc $b_{2k} = 0$ et

$$b_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)\,\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k+1}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots$$

Entre $-\pi$ et 0, la série a pour somme $-\pi : 4$. Pour $x = 0$, sa valeur est 0, moyenne des valeurs de part et d'autre, conformément aux théories générales.

Deuxième exemple. — Soit à développer $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $(0,\pi)$. On a $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, donc $b_{2k+1} = 0$ et, en intégrant par parties,

$$b_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \sin 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \cdots$$

et la série est encore discontinue pour $x = 0$.

Si l'on soustrait ce développement du précédent, il vient

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

et, les deux membres étant impairs, cette nouvelle formule est valable entre $-\pi$ et $+\pi$ (limites exclues).

De même, en ajoutant,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

et cette formule est valable de 0 à 2π (limites exclues), parce que les deux membres changent seulement de signe quand on change x en $2\pi - x$.

146. Exemples de séries de cosinus.—Les coefficients a_m du développement en série de cosinus sont (f étant paire) fournis par les formules

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha\right],$$

d'où, en changeant α en $\pi - \alpha$ dans la dernière intégrale,

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) + (-1)^m f(\pi - \alpha)] \cos m\alpha\, d\alpha.$$

Premier exemple. — Soit à développer $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, on a $a_{2k} = 0$ et, en intégrant par parties,

$$a_{2k-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \cos (2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{2}{(2k+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin (2k+1)\alpha\, d\alpha,$$

d'où $a_{2k+1} = 2 : (2k+1)^2\pi$. Par conséquent,

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right].$$

Cette égalité est valable entre 0 et π, limites comprises.

Deuxième exemple. — Soit à développer $\sin px$ (p entier) dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Si p est pair, $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$; donc $a_{2k} = 0$ et

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{4p}{\pi}\,\frac{1}{p^2 - (2k+1)^2}.$$

Si p est impair, $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$; donc $a_{2k+1} = 0$, et

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos 2k\alpha\, d\alpha = \frac{4p}{\pi}\,\frac{1}{p^2 - (2k)^2}.$$

Il vient, en définitive, entre 0 et π,

$$\sin px = \begin{cases} \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{p^2-1} + \dfrac{\cos 3x}{p^2-3^2} + \dfrac{\cos 5x}{p^2-5^2} + \cdots\right] & (p \text{ pair}) \\ \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{\cos 2x}{p^2-2^2} + \dfrac{\cos 4x}{p^2-4^2} + \cdots\right] & (p \text{ impair}). \end{cases}$$

Troisième exemple. — Soit à développer $\operatorname{Log}\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)$ en série de cosinus dans l'intervalle $(0, \pi)$. On a d'abord (*t.* I, n° 251)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = 2\operatorname{Log}2 - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{Log}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = 0.$$

Ensuite, en intégrant par parties, puis par la formule (5) du n° 130,

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\alpha \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = -\frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin m\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$= -\frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha - \frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = -\frac{1}{m}.$$

On a donc, entre 0 et π,

$$-\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots$$

Si l'on écrit au premier membre $-\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(4\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$, les deux membres seront pairs de période 2π et la formule subsistera quel que soit x. La fonction considérée ici n'est plus bornée, elle est, en effet, infinie pour $x = k\pi$.

§ 6. Séries de Fourier quelconques. Sommation. Singularités.

147. Intégration des séries de Fourier. — Théorème. — *Une série de Fourier (même divergente) de fonction absolument intégrable* (n° 129) *peut toujours être intégrée terme à terme dans un intervalle. Si les limites de l'intervalle varient, la convergence est uniforme.* (Lebesgue).

En effet, considérons le développement formel

(1) $$f(x) - \frac{1}{2}a_0 \backsim \sum_1^\infty (a_m\cos mx + b_m\sin mx),$$

le signe $\backsim$ signifiant seulement que le second membre est la série de

Fourier du premier, donc que a_m et b_m sont les constantes de Fourier de $f(x)$.

Soit $F(x)$ l'intégrale du premier membre entre 0 et x ; on aura la relation

$$(2) \qquad F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx = 0.$$

Mais F, étant continue et à variation bornée, peut se développer en série de Fourier uniformément convergente entre 0 et 2π, sous la forme

$$(3) \qquad F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty (A_m \cos mx + B_m \sin mx).$$

Les coefficients de Fourier de F se ramènent à ceux de f par une intégration par parties. Il vient, en effet, les termes aux limites s'annulant par (**2**),

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \cos mx \, dx = - \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} F'(x) \sin mx \, dx = - \frac{b_m}{m}.$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x) \sin mx \, dx = \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} F'(x) \cos mx \, dx = \frac{a_m}{m}.$$

Substituons ces valeurs dans (**3**). Eliminons ensuite A_0 en soustrayant membre à membre de l'équation (**3**) celle qu'elle fournit pour $x = 0$. Nous trouvons, pour x compris entre 0 et 2π, le développement uniformément convergent

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{(1 - b_m) \cos mx + a_m \sin mx}{m}.$$

C'est précisément ce qu'on obtient en intégrant le second membre de (**1**). L'intégration est donc permise entre 0 et 2π et, par suite, dans tout intervalle à cause de la périodicité.

148. Sommation des séries de Fourier divergentes. — *Sommer une série de Fourier divergente, c'est, connaissant cette série, déterminer la fonction génératrice.* En d'autres termes, c'est *déterminer $f(x)$ quand on connaît ses constantes de Fourier.*

Le théorème précédent fournit un premier procédé pour résoudre cette question, car il permet de déterminer l'intégrale indéfinie de $f(x)$ et, par conséquent, $f(x)$ lui-même partout où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale [1], en particulier partout où $f(x)$ est continue.

[1] Donc *presque partout* si l'on se place au point de vue de M. Lebesgue.

Ce procédé de sommation est indirect. On peut aussi se servir des procédés généraux de sommation des séries divergentes étudiés par M. Borel *(Leçons sur les séries divergentes)*. Nous allons indiquer en quoi ils consistent.

149. Procédé général de sommation des séries divergentes. — Le procédé de M. Borel consiste à multiplier les termes successifs de la série divergente proposée, à savoir

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

par des facteurs, fonctions d'un paramètre r :

$$a_0(r),\ a_1(r), \ldots\ a_n(r), \ldots$$

qui sont positifs, non croissants d'un facteur au suivant, et tendent tous vers l'unité quand r tend vers une certaine limite r_0. On forme ainsi une série auxiliaire

$$\Sigma a_n(r)\, u_n.$$

On s'arrange de manière qu'elle converge tant que r n'atteint pas sa limite. Alors si la somme de la série auxiliaire, qui dépend de r, tend vers une limite quand r tend vers r_0, cette limite sera, par définition, la somme (au sens généralisé) de la série proposée.

Cette généralisation serait évidemment inutile si l'on n'avait le théorème suivant :

Théorème. — *La somme d'une série au sens généralisé coïncide avec la somme au sens ordinaire chaque fois que la série converge.*

Les termes de la série auxiliaire tendent vers ceux de la proposée. Reste à montrer que l'on peut passer à la limite dans chaque terme et, à cet effet, que la convergence de la série proposée entraîne, pour r variable, la convergence *uniforme* de la série auxiliaire.

Soit ε un nombre positif. Posons

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots$$

La série étant convergente, on peut assigner un nombre N tel que $|R_n|$ soit $< \varepsilon$ pour $n > N$. Le reste ρ_n de la série auxiliaire est

$$\begin{aligned}\rho_n &= a_n(R_{n+1} - R_n) + a_{n+1}(R_{n+2} - R_{n+1}) + a_{n+2}(R_{n+3} - R_{n+2}) + \cdots\\ &= a_n R_n + (a_{n+1} - a_n)\, R_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+1})\, R_{n+2} + \cdots\end{aligned}$$

Tous les R sont de module $< \varepsilon$, toutes les parenthèses négatives, de sorte que, pour $n > N$, on a aussi

$$|\rho_n| < \varepsilon\,[a_n + (a_n - a_{n+1}) + \cdots] < 2\varepsilon\, a_n < 2\varepsilon.$$

Donc, N étant indépendant de r, la convergence est uniforme.

150. Procédé de la moyenne arithmétique. — Le procédé de sommation qui précède avait déjà été appliqué par POISSON aux séries de Fourier. Poisson faisait $a_n = r^n$, r tendant vers l'unité. Nous avons fait connaître nous mêmes un nouveau procédé du même genre [1]. Nous laisserons ces méthodes de côté et nous allons étudier le *procédé de la moyenne arithmétique*, que M. FEJÉR a appliqué avec beaucoup de succès à la théorie des séries de Fourier. Ce procédé, qui rentre aussi dans les procédés généraux de M. Borel, consiste à attribuer comme somme à la série considérée, dont les $n+1$ premiers termes ont pour somme S_n, la limite pour n infini, quand elle existe, des quantités

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,u_k. \tag{4}$$

Les facteurs a de la méthode de M. Borel sont ici de la forme $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ et tendent vers 1 quand le paramètre n (au lieu de r) tend vers l'infini. Mais les coefficients a deviennent tous nuls à partir d'un certain rang, ce qui peut être considéré comme un avantage, les sommes σ_n définissant alors *des suites trigonométriques finies*.

Quand la série est convergente, le procédé de la moyenne arithmétique coïncide avec le procédé de sommation ordinaire, en vertu du théorème du nº précédent. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Elle l'est cependant dans un cas important, comme le montre le théorème suivant :

151. Théorème de Hardy-Landau. — *Lorsqu'une série $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ est positive ou, plus généralement, telle que le produit mu_m reste supérieur à un nombre négatif fixe $-A$, alors, si la série est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, elle est convergente et on lui trouve, par conséquent, la même somme par le procédé de sommation ordinaire.*

Soit, comme ci-dessus,

$$S_m = \sum_0^m u_k, \qquad \sum_0^{m-1} S_k = m\sigma_m.$$

[1] Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, nº 3, 1908.

On en tire, pour tout entier $p < m$,

$$\sum_{m-p}^{m-1} S_k = m\sigma_m - (m-p)\sigma_{m-p} = p\sigma_{m-p} - m(\sigma_m - \sigma_{m-p}).$$

$$\sum_{m}^{m+p-1} S_l = (m+p)\sigma_{m+p} - m\sigma_m = p\sigma_{m+p} - m(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

Mais on a, pour k compris entre $m-p$ et m, et pour l compris entre m et $m+p$, la parenthèse dans les expressions ci-dessous renfermant au plus p termes,

$$S_k = S_m - (u_{k+1} + \cdots + u_m) < S_m + p\frac{A}{m-p};$$

$$S_l = S_m + (u_{m+1} + \cdots + u_k) > S_m - p.\frac{A}{m}.$$

Substituant ces limites dans les précédentes équations, et divisant par p, on en tire

$$S_m + \frac{p}{m-p}A > \sigma_{m-p} - \frac{m}{p}(\sigma_m - \sigma_{m-p})$$

$$S_m - \frac{p}{m}A < \sigma_{m+p} - \frac{m}{p}(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

Soit S la limite de σ_m. Faisons tendre m vers l'infini, et $m-p$ avec lui, mais de manière que $p:m$ tende vers un nombre positif donné ε d'une petitesse arbitraire. Nous tirons des relations précédentes

$$\lim S_m + \frac{\varepsilon A}{1-\varepsilon} \geqslant S, \qquad \lim S_m - \varepsilon A \leqslant S.$$

Donc, ε étant arbitraire, $\lim S_m = S$.

152. Intégrale de M. Fejèr. — Dans le cas des séries de Fourier, σ_m s'exprime par une intégrale remarquable, qu'il faut rapprocher de celle de Dirichlet, et que nous appellerons *intégrale de M. Fejèr.*

La somme S_m étant fournie par l'intégrale de Dirichlet (n° 130), il vient, en effet,

$$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\frac{\sum_0^{m-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha;$$

et, en utilisant la formule de sommation suivante :

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sum_0^{m-1}\sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\alpha = \sum_0^{m-1}\frac{\cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha}{2} = \frac{1-\cos m\alpha}{2},$$

on trouve l'*intégrale de M. Fejèr* :

(5) $$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\frac{1-\cos m\alpha}{(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2}\,d\alpha.$$

Si l'on remplace $(1 - \cos m\alpha)$ par $2\sin^2 m\frac{\alpha}{2}$ et la variable d'intégration α par 2α, elle se ramène à la forme

(6) $$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2\alpha) + f(x-2\alpha)]\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

L'*intégrale de M. Fejèr* présente sur celle de Dirichlet un avantage précieux : le facteur qui multiplie f est essentiellement positif, ce qui autorise l'usage du théorème de la moyenne. Nous allons immédiatement nous en servir.

153. Théorème obtenu par l'application du théorème de la moyenne à l'intégrale de M. Fejèr. — *Si l'on désigne par* L *et* l *les bornes supérieure et inférieure de* f *supposée bornée, toutes les sommes* σ_m *de M. Fejèr sont intermédiaires entre* l *et* L.

En effet, le théorème de la moyenne s'appliquant à l'intégrale de M. Fejèr, σ_m est compris entre

$$\frac{2\,l}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{2\,L}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

c'est-à-dire entre l et L, car, pour $m \geqslant 1$, on a

(7) $$\frac{2}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1,$$

l'intégrale de M. Fejèr se réduisant à cela quand f se réduit à 1.

M. Fejèr a déduit de là un résultat très élégant :

Si $f(x)$ *est bornée comme ci-dessus par les deux nombres* l *et* L *et si les modules des produits* ma_m *et* mb_m *de ses constantes de Fourier par leur indice ne surpassent pas deux nombres fixes* A *et* B *quel que soit* m, *alors une somme* S_m *quelconque de la série de Fourier est comprise entre*

$$l - (A + B) \qquad \text{et} \qquad L + (A + B).$$

En effet, l'équation (4) du nº 150 peut s'écrire

$$\sigma_n = S_{n-1} - \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} ku_k.$$

Dans notre hypothèse, on a

$$|\, ku_k \,| = |\, k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \,| < A + B.$$

Par conséquent, $\sigma_n - S_{n-1}$ est compris entre $\pm (A + B)$. D'ailleurs σ_n étant compris entre l et L, on obtient ainsi le théorème énoncé.

Remarque. — Le théorème précédent est toujours applicable aux fonctions à variation bornée dans tout l'intervalle d'amplitude 2π. En effet, *les produits ma_m et mb_m sont essentiellement bornés quand la fonction est à variation bornée.* Il suffit de le prouver pour une fonction non décroissante. On a, dans ce cas, par le deuxième théorème de la moyenne,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \frac{f(-\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\xi} + \frac{f(\pi)}{\pi}\int_{\xi}^{\pi} \cos mx\, dx,$$

donc

$$a_m = \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{\pi}\,\frac{\sin m\xi}{m}$$

et une formule analogue pour b_m, ce qui prouve la proposition.

Application. — On a, entre 0 et 2π (n° 145),

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots..$$

Dans ce cas-ci, $l = -\frac{\pi}{2}$, $L = +\frac{\pi}{2}$, $A = 0$, $B = 1$, donc, quel que soit n, la somme

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n}$$

est comprise entre $\pm\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

154. Condition de convergence du procédé de M. Fejèr. — Cherchons la condition pour que σ_m tende vers une limite déterminée S. A cet effet, soustrayons de l'équation (6) l'équation (7) du n° précédent multipliée par S. En posant,

$$(8)\qquad \varphi(\alpha) = f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) - 2S,$$

il vient

$$\sigma_m - S = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 d\alpha.$$

La condition pour que σ_m tende (uniformément) vers S est que cette intégrale tende (uniformément) vers 0. D'ailleurs, quelque petit que soit ε positif, on peut, de proche en proche, remplacer dans cette condition l'intégrale précédente par les deux suivantes :

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

car les différences de chacune à la suivante s'expriment par les intégrales

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\sin^2 m\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

qui sont respectivement de modules moindres que

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\alpha)|\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi\,\varepsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\alpha)|\,d\alpha,$$

et tendent, par conséquent, uniformément vers 0 quand m tend vers l'infini. De là, la règle suivante :

Règle. — *La condition nécessaire et suffisante pour que σ_m tende (uniformément) vers* S *est que, à tout nombre positif ω, on puisse faire correspondre deux nombres ε et* M *(indépendants de x) tels que l'intégrale*

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\varepsilon}\varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha$$

soit de module $< \omega$ pour tout entier $m > M$.

Cette condition est évidemment réalisée si $\varphi(\alpha)$ tend vers 0 avec α, car alors on peut prendre ε assez petit pour que $|\varphi(\alpha)|$ soit $<\omega$ pour $\alpha<\varepsilon$, auquel cas l'intégrale précédente est de module moindre que

$$\frac{\omega}{m\pi}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha < \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha = \frac{\omega}{2},$$

cette dernière intégrale ayant été calculée au nº 63.

C'est ce qui arrive : 1º en tout point de continuité, en faisant $S = f$; 2º en tout point de discontinuité de première espèce, en faisant $2S = f(x+0) + f(x-0)$. De plus, la convergence sera uniforme dans tout intervalle intérieur à un intervalle de continuité. De là, le théorème suivant, généralisé ensuite par M. Lebesgue :

155. Théorème de M. Fejèr. — *Le procédé de la moyenne arithmétique permet de sommer la série de Fourier en tout point de continuité de $f(x)$ ou en tout point de discontinuité de première espèce. La somme ainsi attribuée à la série sera*

$$f(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

suivant le cas.

Corollaire I. — Si la série de Fourier converge en un point de continuité ou de discontinuité de première espèce, elle doit donc nécessairement converger vers les valeurs indiquées dans le théorème précédent. C'est un cas particulier du théorème établi au n° 149.

Corollaire II. — Si les produits ma_m et mb_m sont bornés, le produit mu_m où u_m est le terme général de la série de Fourier est borné aussi. On peut appliquer le théorème de Hardy-Landau. Donc

Si les produits ma_m et mb_m sont bornés, la série de Fourier converge vers $f(x)$ et tout point de continuité et vers $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$ en tout point de discontinuité de première espèce.

C'est ce qui a lieu pour les fonctions à variation bornée dans tout intervalle, d'après la remarque du n° 153. Nous retrouvons ainsi, dans un cas particulier, le criterium de M. C. Jordan (n° 140).

156. Théorème. — *La série de Fourier, sommée par le procédé de M. Fejèr, a pour somme $f(x)$ presque partout* (Lebesgue).

Prenons $S = f(x)$; *nous allons montrer que σ_m converge vers $f(x)$ en tout point x tel que* $|\varphi(\alpha)|$ *soit, pour* $\alpha = 0$, *la dérivée de son intégrale indéfinie.*

L'intégrale de la règle du n° 154 est de module inférieur à l'intégrale essentiellement positive

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^\varepsilon |\varphi(\alpha)| \left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Pour prouver que la règle s'applique, il suffira évidemment de décomposer cette intégrale en termes : ou négatifs, ou infiniment petits avec $1:m$ (ε fixe), ou aussi petits qu'on veut avec ε (quel que soit m).

Posons, ces deux fonctions Ψ et Φ de α étant absolument continues en dehors du seul point $\alpha = 0$, ce qui autorisera nos intégrations par parties (n° 112),

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha |\varphi|\, d\alpha, \qquad \Psi(\alpha) = \frac{\Phi}{\alpha^2}, \qquad \Psi' = \frac{\Phi'}{\alpha^2} - \frac{2\Phi}{\alpha^3};$$

et observons que, en tout point x de la nature indiquée, c'est-à-dire où $\Phi'(0) = 0$, le quotient $\Phi(\alpha) : \alpha$ tend vers 0 avec α.

Une première intégration par parties ramène l'intégrale à décomposer à la forme

$$\frac{\Phi(\varepsilon)\sin^2 m\varepsilon}{m\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \Psi(\alpha)\sin 2m\alpha\, d\alpha + \frac{2}{m\pi}\int_0^\varepsilon \frac{\Phi(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

Le terme intégré est infiniment petit avec $1:m$; la dernière intégrale aussi, car, $\Phi(\alpha):\alpha$ tendant vers 0 avec α, c'est l'intégrale qu'on vient de discuter dans la démonstration du théorème de M. Fejèr. Quant au terme du milieu, en laissant de côté une partie négative, il se réduit à

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\Psi'(\alpha)\sin 2m\alpha\,d\alpha = \frac{\Psi'(\varepsilon)\cos 2m\varepsilon}{2m\pi} - \frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\Psi''(\alpha)\cos 2m\alpha d\alpha.$$

Le terme intégré est infiniment petit avec $1:m$. L'intégrale qui suit est moindre que

$$\frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}|\Psi''|\,d\alpha < \frac{1}{2m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\left(\frac{\Phi'}{\alpha^2}+\frac{2\Phi}{\alpha^3}\right)d\alpha.$$

Effectuons une intégration par parties sur Φ' et laissons de côté un terme intégré négatif : cette expression est moindre que

$$\frac{1}{2m\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon^2}+\frac{2}{m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\frac{\Phi}{\alpha^3}\,d\alpha.$$

Le terme intégré est infiniment petit avec $1:m$. Dans l'intégrale, on a $\Phi<\omega\alpha$ où ω peut être supposé aussi petit qu'on veut avec ε. L'intégrale est donc moindre que

$$\frac{2\omega}{m\pi}\int_{\frac{\pi}{4m}}^{\varepsilon}\frac{d\alpha}{\alpha^2} < \frac{8\omega}{\pi^2} < \omega,$$

et, par conséquent, aussi petite qu'on veut avec ε.

Pour prouver l'énoncé de M. Lebesgue, il reste encore à montrer que l'on a $\Phi'(0)=0$ *presque partout*. On a

$$|\varphi(\alpha)| \leq |f(x+2\alpha)-f(x)| + |f(x-2\alpha)-f(x)|.$$

Cette condition sera donc réalisée en tout point x où

$$\int_0^{\alpha}|f(x+\alpha)-f(x)|\,d\alpha$$

aura sa dérivée nulle pour $\alpha=0$; en particulier, en tout point x où $|f(x)-c|$ sera la dérivée de son intégrale indéfinie quel que soit c, donc presque partout (nº 102).

157. Théorème. — *Si $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont sommables et, de plus, f bornée, l'intégrale*

$$F(u)=\int_a^b\varphi(x)\,f(x+u)\,dx$$

est fonction continue de u. Si f n'est pas bornée, la conclusion subsiste, pourvu que φ^2 et f^2 soient sommables.

On suppose que u varie de manière que $x+u$ ne sorte pas d'un

intervalle (A, B) où ces conditions ont lieu. On peut d'ailleurs toujours admettre que f et φ sont *non négatifs*. Nous ferons donc cette hypothèse.

1°) *Si $f(x)$ est continue*, on peut donner à u un accroissement assez petit pour que celui de $f(x+u)$ soit $< \varepsilon$ quel que soit x, auquel cas celui de $F(u)$ sera moindre que

$$\varepsilon \int_a^b |\varphi(x)| \, dx,$$

donc aussi petit qu'on veut, et $F(u)$ est continue.

2°) *Si f est sommable et, de plus, bornée*, par exemple $< M$, on peut définir une fonction ψ, positive, continue, non supérieure à M, égale à f à moins de ε près sauf dans un ensembe de mesure $< \omega$ (n° 93). On peut donc décomposer f dans la somme de trois fonctions

$$f(x) = \psi(x) + E(x) + \Omega(x),$$

où la fonction E est de module $< \varepsilon$ partout, la fonction Ω, nulle sauf dans un ensemble e de mesure $< \omega$, dans lequel d'ailleurs Ω ne surpasse pas $M + \varepsilon$. Il vient ainsi

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x+u)dx + \int_a^b \varphi(x)\,E(x+u)dx + \int_a^b \varphi(x)\Omega(x+u)dx.$$

Donc $F(u)$ est continue, car la première intégrale est fonction continue de u, la seconde aussi petite qu'on veut avec ε et la troisième avec ω quel que soit u. En effet, la seconde et la troisième sont respectivement de modules moindres que les intégrales

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (M+\varepsilon)\int_e \varphi(x-u)\,dx,$$

cette dernière aussi petite qu'on veut avec me (donc avec ω) quel que soit u, parce que $\int\varphi(x)\,dx$ est une fonction absolument continue.

3°) Enfin, *si f^2 et φ^2 sont sommables*, nous définissons une fonction f_n égale à f si $f < n$ et à n dans le cas contraire. Quelque petit que soit ω, nous pouvons prendre n assez grand pour que $f - f_n$ soit nulle sauf dans un ensemble e de mesure $< \omega$. Il vient alors

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x)\,f_n(x+u)dx + \int_a^b \varphi(x)\,[f(x+u) - f_n(x+u)]\,dx.$$

Donc $f(u)$ est fonction continue de u, car la première intégrale est fonction continue de u et la seconde aussi petite qu'on veut avec ω quel que soit u. Elle est, en effet, moindre que

$$\int_e \varphi(x-u)\,f(x)\,dx < \int_e \varphi(x-u)^2 dx + \int_e f(x)^2\,dx\,;$$

et ces deux intégrales sont aussi petites qu'on veut avec me, parce que $\int f^2 dx$ et $\int \varphi^2 dx$ sont absolument continues.

158. Formules de Parseval. — Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions de période 2π dont les carrés soient sommables. Désignons respectivement avec les lettres a, b et α, β leurs coefficients de Fourier. En sommant la série de Fourier de $f(x)$ par la méthode de M. Fejèr, on obtient les deux expressions suivantes de σ_m (nº 152) :

$$\frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{1-\cos mu}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}\,du = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)(a_k\cos kx + b_k \sin kx).$$

Multiplions par $\varphi(x)\,dx : \pi$ et intégrons de $-\pi$ à π, ce qui se fera sous le signe $\int$ au premier membre. En posant

$$\mathrm{F}(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,f(x+u)dx,$$

il vient

$$\frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{F}(u)\,\frac{1-\cos mu}{\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2}\,du = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)(a_k\alpha_k + b_k\beta_k).$$

Cette nouvelle intégrale est celle de M. Fejèr mais pour la fonction F. Or, d'après le théorème précédent, $\mathrm{F}(u)$ est continue pour $u = 0$. Donc, quand m tend vers l'infini, cette intégrale tend, par le théorème de M. Fejèr (nº 155), vers

$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,f(x)\,dx.$$

Quant au second membre de l'équation, sa limite sera

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k),$$

pourvu que cette série converge (nº 149). Pour prouver qu'elle converge, prenons $\varphi(x) = f(x)$; nous aurons

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \lim_{m=\infty}\sum_1^{m-1}\left(1-\frac{k}{m}\right)(a_k^2 + b_k^2).$$

Donc Σa_k^2 et Σb_k^2 convergent, sinon ces séries seraient infinies, auquel cas la limite du second membre ne saurait être finie, puis qu'elle surpasse toute portion finie des séries.

Maintenant, comme on a

$$|a_k\alpha_k| < \frac{a_k^2+\alpha_k^2}{2}, \qquad |b_k\beta_k| < \frac{b_k^2+\beta_k^2}{2},$$

les séries $\Sigma a_k\alpha_k$ et $\Sigma b_k\beta_k$ sont *absolument convergentes*, ce que nous voulions démontrer.

En définitive, nous avons ainsi établi *les formules de Parseval* :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

sous la seule condition que f^2 et φ^2 soient sommables.

159. Singularités des séries Fourier de fonctions continues. — Une série de Fourier peut présenter deux genres de singularité qui méritent de fixer l'attention. D'abord elle peut diverger sans que la fonction cesse d'être continue. C'est la singularité de P. du Bois-Reymond, qui l'a signalée en 1876. Ensuite elle peut représenter une fonction continue sans converger uniformément dans un intervalle de continuité. C'est la singularité de M. Lebesgue, qui l'a signalée en 1905.

M. Fejèr a indiqué, pour former ces singularités des procédés systématiques. Celui que nous allons exposer, d'ailleurs imité des siens, jette une grande lumière sur cette question.

Posons

$$\varphi(n, x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right).$$

Nous savons (n° 153) que cette fonction ne peut surpasser en valeur absolue une constante fixe A quels que soient n et x.

Soit maintenant m un entier $> n$; les deux fonctions :

$$\varphi(n, x)\sin mx, \qquad -\varphi(n, x)\cos mx,$$

admettent la même borne absolue A. Leurs développements de Fourier, écrits dans l'ordre naturel des termes, sont respectivement les sommes limitées de cosinus et de sinus ci-dessous :

$$(1) \qquad \sum_{r=n}^{1} \frac{\cos(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m+r)x}{r}$$

$$(2) \qquad \sum_{r=n}^{1} \frac{\sin(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\sin(m+r)x}{r}.$$

Ce sont les propriétés des sommes partielles de ces deux développements qui vont nous servir. Nous appellons d'ailleurs *somme partielle* d'un développement de Fourier (dont les termes sont rangés dans l'ordre naturel) la somme d'un groupe quelconque de termes *consécutifs* de ce développement.

Première propriété. — *Quand x varie de $2k\pi + \varepsilon$ à $2k\pi + (2\pi - \varepsilon)$, on peut assigner aux sommes partielles des développements* (1) *et* (2) *une borne absolue* L(ε), *qui ne dépend que de* ε.

Il suffit évidemment de prouver cela pour les sommes des deux types suivants (dont les sommes partielles en question ne sont que des combinaisons linéaires très simple) :

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{\cos(m \pm r)x}{r}, \qquad \sum_{r=1}^{s} \frac{\sin(m \pm r)x}{r}, \quad (s = 1, 2, 3\ldots)$$

Le module de chacune de ces sommes est moindre que celui de l'expression obtenue en ajoutant à la première somme la seconde multipliée par i (ou $\sqrt{-1}$), à savoir

$$e^{m i x} \sum_{r=1}^{s} \frac{e^{\pm r i x}}{r}.$$

Mais, comme le facteur $1 : r$ est positif et décroissant, cette expression admet, en vertu du théorème d'Abel (*t.* I, n° 384), la même borne absolue que l'ensemble des expressions ($s = 1, 2, \ldots$) :

$$\sum_{1}^{s} e^{\pm r i x} = \frac{e^{\pm i x}(e^{\pm s i x} - 1)}{e^{\pm i x} - 1} = \pm \frac{e^{\pm \frac{i x}{2}}(e^{\pm s i x} - 1)}{2 i \sin \frac{x}{2}}.$$

Ces expressions sont de modules $< 1 : \left|\sin \frac{x}{2}\right|$ et ont, par conséquent pour borne $1 : \sin \frac{\varepsilon}{2}$.

Deuxième propriété. — Si x peut tendre vers $2k\pi$, la propriété précédente disparaît et l'on voit apparaître, dans les développements (1) et (2) respectivement, le germe des singularités de du Bois-Reymond et de Lebesgue.

En effet, pour $x = 2k\pi$, le développement (1) contient une somme partielle, infiniment grande avec n, savoir

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{r} > \int_{1}^{n+1} \frac{dr}{r} > \operatorname{Log} n.$$

Pour $x = \pi : 2m + 2k\pi$, le développement (2) contient aussi une somme partielle, infiniment grande avec n, savoir (m étant $> n$)

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{m-r}{m}\frac{\pi}{2}\right)}{r} > \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\frac{m-r}{m}\right)}{r} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{r} - \frac{n}{m} > \operatorname{Log} n - 1.$$

Construction des singularités. — Soit maintenant $a_1 + a_2 + \cdots$ une série illimitée convergente à termes positifs. Donnons nous deux suites de nombres entiers croissants b_n, c_n ($b_n < c_n$) définis par leurs indices. Formons les deux séries :

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n, x) \sin(c_n x) = \Phi(x),$$

$$\text{(II)} \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(b_n, x) \cos(c_n x) = \Psi(x).$$

Ces deux séries sont absolument et uniformément convergentes, car leurs termes sont de modules moindres que les termes correspondants de la série à termes positifs $A\Sigma a_n$. Donc les deux séries ont pour somme des fonctions *toujours continues*.

Faisons croître b_n assez rapidement pour que le produit a_n Log b_n croisse à l'infini avec n. Alors, par la deuxième propriété ci-dessus, le développement de Fourier du terme général de (I) renferme une somme partielle infiniment grande avec n pour $x = 2k\pi$; celui du terme général de la série (II) une somme partielle infiniment grande avec n dans le voisinage de $x = 2k\pi$.

Faisons croître c_n avec n assez vite pour que les développements de Fourier de deux termes consécutifs de la série (I) ou de la série (II) ne puissent pas se réduire entre eux. Il suffit pour cela de faire [1]

$$c_n > c_{n-1} + b_{n-1} + b_n.$$

Alors les séries de Fourier des fonctions Φ et Ψ s'obtiennent en écrivant tout simplement à la suite les uns des autres les développements de Fourier des termes consécutifs des séries (I) et (II). Les sommes partielles relatives aux termes généraux de ces deux séries sont aussi, dans ce cas, des sommes partielles des développements de Fourier des fonctions Φ et Ψ.

Donc *la série de Fourier de Φ diverge pour $x = 2k\pi$; celle de Ψ ne peut converger uniformément dans le voisinage de $x = 2k\pi$.*

Par contre, quelque petit que soit ε, ces deux séries de Fourier convergent uniformément vers les fonctions dans l'intervalle de $2k\pi + \varepsilon$ à $2k\pi + (2\pi - \varepsilon)$. Démontrons-le seulement pour la première, le raisonnement étant le même pour les deux. La somme S_m des premiers termes de la série de Fourier de Φ se compose d'une certaine somme s_{n-1} des premiers termes de la série (I), plus une somme partielle du développement de Fourier du terme suivant de (I), ce terme est

$$a_n \varphi(b_n, x) \sin(c_n x).$$

Donc cette dernière somme partielle, de module moindre que $a_n \mathrm{L}(\varepsilon)$ (par la première propriété qui précède), tend uniformément vers 0 quand n (ou m) tend vers l'infini. Elle est sans influence sur la convergence, de sorte que la série de Fourier de Φ converge de la même façon que la série (I).

Les séries de Fourier de Φ et Ψ ne peuvent donc cesser de converger que pour les valeurs $2k\pi$. Nous avons vu tantôt que celle de Φ diverge : *elle présente donc, aux points $x = 2k\pi$, la singularité de P. du Bois-Reymond.* Celle de Ψ, au contraire, converge pour $x = 2k\pi$ puisque tous ses termes sont nuls ; mais nous avons vu tout à l'heure qu'elle ne peut converger *uniformément* autour de ces points : *elle présente donc aux points $x = 2k\pi$ la singularité de M. Lebesgue.*

Les deux séries de Fourier de Φ et de Ψ sont respectivement des

(1) On réalisera, par exemple, toutes ces conditions par le choix :

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \qquad b_n = 2^{n^3}, \qquad c_n = 2^{(n+1)^3}.$$

séries de sinus seuls et de cosinus seuls, mais *elles ont les mêmes coefficients*. On dit que les deux séries sont *conjuguées*. Les fonctions Φ et Ψ fournissent donc un exemple de deux séries de Fourier conjuguées présentant l'une la singularité de P. du Bois-Reymond, l'autre celle de M. Lebesgue. C'est M. Fejèr qui a fourni le premier exemple réalisant ces conditions.

Remarque. — Si l'on modifie les définitions des fonctions Φ et Ψ en remplaçant x par nx dans le terme général des séries (I) et (II), les fonctions Φ et Ψ ne cessent pas d'être continues. La série de Fourier de Φ devient divergente pour toute valeur de x commensurable à π, mais nous ne savons plus comment elle se comporte pour les autres ; la série de Fourier de Ψ ne peut plus converger uniformément dans aucun intervalle, mais nous ne sommes plus assurés qu'elle converge.

§ 7. Séries trigonométriques quelconques. Unicité du développement.

160. Théorème de G. Cantor. — Nous commencerons par signaler un théorème important dû à G. Cantor, mais dont la démonstration est un peu abstraite :

Lorsqu'une série trigonométrique est convergente pour tous les points d'un intervalle, ses coefficients tendent vers 0.

Ce théorème permettrait d'abréger la démonstration du n° 165, mais on peut s'en passer, comme nous le verrons, et nous indiquerons seulement sa démonstration en petit texte.

Ce théorème est un cas particulier du suivant :

Théorème. — *Une série trigonométrique dont le terme général est* $\rho_m \cos m\,(x - \alpha_m)$ *diverge presque partout si* ρ_m *(supposé positif) ne tend pas vers zéro* (Lebesgue).

Si ρ_m ne tend pas vers 0, on peut assigner un nombre positif δ tel qu'il y ait une infinité de $\rho_m > \delta$. Désignons leurs indices par $m_1, m_2, \ldots m_n, \ldots$ Soit ε un nombre positif infiniment petit. Soit ensuite m un indice quelconque pris dans la suite précédente ; l'ensemble E_m des valeurs de x entre 0 et 2π pour lesquelles on a

$$\rho_m \mid \cos m\,(x - \alpha_m) \mid < \varepsilon\delta,$$

est évidemment de même mesure que celui des valeurs de x pour lesquelles on a : $\rho_m \mid \cos mx \mid < \varepsilon\delta$, et de mesure moindre que celui des valeurs de x pour lesquelles on a : $\mid \cos mx \mid < \varepsilon$. Or cet ensemble-ci se compose de $2m$ intervalles, dont la somme des amplitudes est la même quel que soit m (car les intervalles sont m fois plus petits pour $m = m$

que pour $m = 1$). Désignons cette somme d'amplitudes par ω ; ω sera infiniment petit avec ε, comme on le voit immédiatement pour $m = 1$.

Considérons maintenant la suite des ensembles :

$$E_{m_1},\ E_{m_2},\ E_{m_3},\ldots$$

Tous ces ensembles étant de mesures $< \omega$, l'ensemble limite restreint de la suite sera aussi de mesure $< \omega$ (*t.* 1 n° 270). En dehors de cet ensemble-limite, la série a une infinité de termes $> \varepsilon\delta$ et elle diverge. Elle diverge donc entre 0 et 2π, sauf dans un ensemble de mesure $< \omega$ qui est infiniment petit avec ε, donc elle diverge presque partout.

161. Dérivée seconde généralisée. Théorèmes de M. Lebesgue et de M. Scharz. — Nous appellerons, avec M. Lebesgue, *dérivée seconde généralisée* de $f(x)$ la limite pour $h = 0$, quand elle existe, du quotient [1]

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Cette limite est égale à la dérivée seconde ordinaire quand celle-ci existe au point x (auquel cas la dérivée première existe aux environs de x). En effet, par la formule de Cauchy (*t.* 1, n° 100), le rapport précédent peut se mettre sous la forme $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h)}{2\theta h}$$

et ceci tend vers $f''(x)$, supposée existante, quand h tend vers 0. Nous conviendrons de représenter par $f''(x)$ non seulement la dérivée seconde ordinaire, mais aussi la dérivée seconde généralisée au cas où la précédente n'existerait pas.

Théorème de M. Lebesgue. — *Si une fonction continue $f(x)$ possède une dérivée seconde généralisée $f''(x)$ en tout point d'un intervalle (a, b), le quotient $\Delta^2 f(x_0) : h^2$ est intermédiaire entre les bornes supérieure et inférieure de $f''(x)$ dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ supposé compris dans (a, b).*

En effet, d'après l'expression du rapport $\Delta^2 f(x) : h^2$, la dérivée seconde généralisée est positive en tout point où $f(x)$ est minimum, négative en tout point où $f(x)$ est maximum. Posons

$$\psi(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + (x-x_0)^2\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}.$$

[1] Il faut observer que $\Delta^2 f$ ne désigne pas ici la différence seconde de f au sens ordinaire.

Ce polynome du second degré en x reprend la même valeur $f(x_0)$ aux trois points $x_0 - h$, x_0, $x_0 + h$. Donc la différence $f(x) - \psi(x)$ s'annule en ces trois points. Comme elle est continue, elle a au moins un maximum et au moins un minimum entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, soit en x_1 et en x_2 respectivement (l'un des deux points pouvant être x_0).

Donc les dérivées secondes généralisées en ces deux points satisfont aux inégalités

$$f''(x_1) - \psi''(x_1) < 0, \qquad f''(x_2) - \psi''(x_2) > 0.$$

Mais ψ'' est, pour le polynome ψ, la dérivée seconde ordinaire, savoir $\Delta^2 f(x_0) : h^2$ et les inégalités précédentes s'écrivent

$$f''(x_1) < \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} < f''(x_2),$$

ce qui prouve la proposition.

Théorème de M. Schwarz. — *Une fonction continue dont la dérivée seconde généralisée est constamment nulle dans un intervalle, est une fonction linéaire dans cet intervalle.*

Dans ce cas, $\Delta^2 f(x)$ est nul, quels que soient h et x, par le théorème précédent. En d'autres termes, la somme des valeurs de f en deux points est double de la valeur au point milieu. On a ainsi

$$f(x + h) + f(x_1) = f(x_1 + h) + f(x) = 2f\left(\frac{x + x_1 + h}{2}\right),$$

donc

$$f(x + h) - f(x) = f(x_1 + h) - f(x_1).$$

A des accroissements égaux de x correspondent des accroissements égaux de f, d'où il suit que les variations de f et de x sont proportionnelles et que f a une dérivée constante. Donc f est une fonction linéaire.

Corollaire. — Ce théorème fixe le degré d'indétermination d'une fonction dont on connaît la dérivée seconde généralisée : *Deux fonctions qui ont la même dérivée seconde généralisée ne peuvent différer que par une fonction linéaire.*

162. Méthode de Riemann pour sommer les séries trigonométriques. — Considérons la série trigonométrique *quelconque*, c'est-à-dire que ses coefficients peuvent n'être pas ceux de Fourier,

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

ou, si, pour abréger, nous posons

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad A_m = a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

la série

$$(1^{\text{bis}}) \qquad A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \cdots$$

Supposons que a_m et b_m soient bornés, ce qui a toujours lieu si ces coefficients tendent vers 0 avec $1 : m$. Formons la série

$$(2) \qquad F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \cdots - \frac{A_m}{m^2} - \cdots,$$

que l'on déduit de la première en intégrant deux fois chaque terme. Cette série sera uniformément convergente dans tout intervalle, car, A_m ne pouvant surpasser en valeur absolue un nombre positif A, les termes de la série précédente sont inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants de la série positive convergente $A\Sigma m^{-2}$. Donc la série (2) a pour somme une fonction $F(x)$ continue pour toutes les valeurs de x.

La méthode de sommation de Riemann consiste à attribuer comme somme à la série (1) la dérivée seconde généralisée de $F(x)$ quand elle existe, c'est-à-dire la limite pour $\alpha = 0$ du rapport

$$\frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2}.$$

163. Théorème fondamental de Riemann. — *Chaque fois que la série trigonométrique converge, le procédé de sommation de Riemann donne le même résultat que le procédé de sommation ordinaire.* Autrement dit, *si la série converge vers $f(x)$, le rapport précédent a pour limite $f(x)$.*

Observons les relations :

$$\cos n(x+2\alpha) + \cos n(x-2\alpha) - 2\cos nx = 2\cos nx(\cos 2n\alpha - 1),$$
$$\sin n(x+2\alpha) + \sin n(x-2\alpha) - 2\sin nx = 2\sin nx(\cos 2n\alpha - 1);$$

et remplaçons-y $(\cos 2n\alpha - 1)$ par $-2\sin^2 n\alpha$, nous aurons

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2} \\ = A_0 + A_1 \left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \cdots + A_n \left(\dfrac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + \cdots \end{cases}$$

Soient s_n la somme des n premiers termes de la série (1), et $f(x)$ la somme de la série entière supposée convergente au point x. Posons

$$f(x) = s_n + R_n, \qquad \text{d'où} \qquad A_n = R_{n+1} - R_n.$$

Donnons-nous un ε positif d'une petitesse arbitraire, et prenons n assez grand pour que R_n, R_{n+1},... soient tous de modules $< \varepsilon$. Alors, quand α tend vers 0, la somme des n premiers termes de la série (3) tend vers s_n, donc vers $f(x)$ à moins de ε près. Montrons que l'on peut rendre aussi petite qu'on veut avec ε la somme de tous les autres termes, à savoir

$$(R_{n+1}-R_n)\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2+(R_{n+2}-R_{n+1})\left(\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)\alpha}\right)^2+\cdots$$

$$=-R_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2+R_{n+1}\left[\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)\alpha}{(n+1)^2}\right)^2\right]+\cdots$$

A cet effet, nous observons que cette somme est de module moindre que

$$\varepsilon+\varepsilon\left|\int_{n\alpha}^{n+1\,\alpha} d\left(\frac{\sin a}{\alpha}\right)^2\right|+\varepsilon\left|\int_{n+1\,\alpha}^{n+2\,\alpha} d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|+\cdots<\varepsilon+\varepsilon\int_0^\infty\left|d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|.$$

Elle est donc aussi petite qu'on veut avec ε, car la fonction à intégrer est continue et infiniment petite d'ordre 2 pour $\alpha=\infty$, par conséquent, cette dernière intégrale existe.

164. Deuxième théorème de Riemann. — *Quand les coefficients a_n, b_n sont infiniment petits avec* 1 : *n, le quotient*

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

tend vers 0 *avec α, même pour les valeurs de x qui rendraient la série* (1) *divergente.*

En effet, ce quotient est le produit de la série (3) par 2α. Quelque petit que soit ε positif, l'ensemble des termes, en nombre limité, où $|A_n|>\varepsilon$ tend vers 0 avec α. Remplaçons donc, dans la série (3), tous les A par ε ; il suffit de montrer que la limite pour $\alpha=0$ de

$$2\alpha\left[\varepsilon+\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+\cdots+\varepsilon\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2+\cdots\right]=2\varepsilon\sum_0^\infty\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\alpha$$

peut être supposée aussi petite qu'on veut avec ε.

Mais il suffit pour cela d'observer que l'on a (nº 63)

$$\lim\sum_0^\infty\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\alpha=\int_0^\infty\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\frac{\pi}{2}.$$

En effet, quelque grand que soit p, la somme des termes où $n\alpha<p$ tend,

par définition, vers l'intégrale entre 0 et p, tandis que la somme des termes où $n\alpha > p$ est infiniment petite avec $1 : p$; elle est moindre effectivement que la partie correspondante de la série $\Sigma \left[\frac{1}{(n-1)\alpha} - \frac{1}{n\alpha}\right]$ et, par conséquent, $< 1 : (p - \alpha)$.

165. Théorème de Heine-Cantor : Unicité du développement. — *Une fonction $f(x)$, périodique de période 2π, ne peut pas admettre deux développements trigonométriques différents qui convergent partout et cela vers $f(x)$, sauf peut être en des points singuliers isolés.*

Si une même fonction admettait deux développements de cette nature, en les soustrayant l'un de l'autre, on obtiendrait le développement trigonométrique de 0 en série convergente, sauf en des points isolés. Le théorème énoncé revient à dire qu'*un développement semblable de* 0 *n'a lieu que si tous ses coefficients sont nuls.*

Considérons donc ce développement de 0 en série :

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

Soit x une valeur *non singulière*, c'est-à-dire rendant la série convergente vers 0. Remplaçons x par $x + \delta$, puis par $x - \delta$ et ajoutons, il vient

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos n\delta$$

et ceci a lieu pour toutes les valeurs de δ, sauf pour des valeurs singulières isolées. C'est une série trigonométrique en δ, mais qui présente ceci d'essentiel, c'est que le coefficient de $\cos n\delta$ tend vers zéro avec $1 : n$ (x différant d'une valeur singulière). Nous pouvons donc nous borner dans la démonstration au cas où les coefficients tendent vers 0. En effet, la proposition, démontrée dans ce cas, s'appliquera à la série trigonométrique en δ et l'on aura (sauf pour les valeurs singulières de x),

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0 ; \qquad \text{d'où} \qquad a_n = 0, \qquad b_n = 0.$$

Ainsi, il suffit de démontrer la proposition dans l'hypothèse où a_n et b_n tendent vers 0. Faisons cela.

Sommons la série par le procédé de Riemann ; la fonction $F(x)$ aura sa dérivée généralisée nulle sauf aux points singuliers (nº 163). C'est donc une fonction linéaire de x dans l'intervalle de deux points singuliers, d'après le théorème de M. Schwarz (nº 161).

La courbe continue $y = F(x)$ forme donc une droite, ou bien une ligne polygonale dont les sommets ne peuvent correspondre qu'à des valeurs singulières. Mais ce second cas est impossible, car le polygone ne peut avoir de sommet isolé. En effet, soit, par impossible, x_0 l'abscisse d'un sommet isolé. On a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_0+\alpha)+F(x_0-\alpha)-2F(x_0)}{\alpha} = 0,$$

Or, dès que α est assez petit, les deux quotients

$$\frac{F(x_0+\alpha)-F(x_0)}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{F(x_0-\alpha)-F(x_0)}{-\alpha}$$

sont les coefficients angulaires des deux côtés qui aboutissent à ce sommet. D'où il suit que ces coefficients sont égaux et les deux côtés n'en font qu'un. Ainsi $F(x)$ est une fonction linéaire unique $c + c'x$. On a donc, pour toute valeur de x,

$$c + c'x = a_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1^\infty \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

d'où

$$a_0 \frac{x^2}{2} - c'x = c + \sum_1^\infty \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2}.$$

Le second membre admet la période 2π, donc le premier aussi, ce qui entraîne $a_0 = 0$ et $c' = 0$. La relation précédente fournit donc le développement de 0 en série trigonométrique *uniformément convergente.* On peut donc, en toute rigueur, déterminer les coefficients par les formules d'Euler ou de Fourier, qui donnent $c = a_m = b_m = 0$.

REMARQUE. — *Plus généralement, l'unicité du développement de $f(x)$ subsiste si les points où la série trigonométrique cesse de converger vers $f(x)$ forment un ensemble réductible, c'est-à-dire un ensemble dont le dérivé est dénombrable* (1) (CANTOR).

Appelons singulières les seules valeurs de x qui ne tombent pas à l'intérieur d'un intervalle où la fonction $F(x)$ est linéaire. Ces valeurs, si elles existent, forment nécessairement un ensemble fermé. On vient de prouver qu'elles ne peuvent être isolées : ainsi elles forment un ensemble parfait, donc non dénombrable. Cet ensemble est contenu dans le dérivé de l'ensemble des points où la série (4) cesse de converger vers 0. Il ne peut donc exister si ce dernier est dénombrable.

(1) On peut aussi le définir comme ayant un de ses dérivés (d'ordre fini ou transfini) nul.

166. Théorème de P. du Bois-Reymond et Lebesgue. — *Si une fonction* BORNÉE $f(x)$ *de période* 2π *admet un développement trigonométrique, ce ne peut être que celui de Fourier.*

Observons d'abord que $f(x)$ sera sommable comme limite de fonctions continues. Reprenons maintenant l'équation (3) du nº 163. En définissant $\Delta^2 F(x)$ comme au nº 161 sauf que $h = 2\alpha$, cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{\Delta^2 F(x)}{4\alpha^2} = \frac{a_0}{2} + \Sigma\,(a_m \cos mx + b_m \sin mx)\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2.$$

C'est, à cause du théorème du nº 160, une série trigonométrique en x *uniformément convergente*, dont on peut donc déterminer les coefficients par les formules d'Euler. En particulier, celui de cos mx est

$$a_m\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2}\cos mx\,dx.$$

Faisons tendre α vers 0. La fonction $\Delta^2 F : 4\alpha^2$ tend vers la dérivée seconde généralisée $f(x)$ de F *en restant bornée*, parce que f est bornée (Théorème de Lebesgue, nº 161). On peut donc passer à la limite sous le signe $\int$ (nº 94), d'où

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

et une formule analogue pour b_m.

CHAPITRE V.

Equations différentielles ordinaires.
Généralités. Equations du premier ordre.

---

§ 1. Formation des équations différentielles.

167. Définitions. Ordre d'une équation. — On appelle *équation différentielle* une relation qui renferme à la fois les variables et leurs différentielles (ou leurs dérivées). Celles qui ne renferment qu'une seule variable indépendante et les dérivées des variables dépendantes s'appellent des *équations différentielles ordinaires*. Nous ne nous occuperons pour le moment que de celles-là.

Le cas le plus simple est celui où l'équation ne contient que la variable indépendante x, une fonction inconnue y et sa dérivée première y'. Cette équation est de la forme

$$f(x, y, y') = 0$$

et l'on dit qu'elle est *du premier ordre*.

En général *une équation différentielle de l'ordre n* contient la variable indépendante x, une fonction y et des dérivées de y jusqu'à l'ordre n inclus.

Les relations entre les seules variables qui résultent des équations différentielles sont les *intégrales* ou les *solutions* de ces équations.

La génération des équations différentielles peut se concevoir d'une manière qui permet de prévoir la nature de leurs intégrales.

168. Formation d'équations du premier ordre. — Soit une équation

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

entre deux variables x, y et une constante arbitraire C. En la dérivant, on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{2}$$

Généralement cette équation renferme encore C ; mais, si l'on peut éliminer C entre (**1**) et (**2**), on obtient une relation

$$f(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

qui a au moins la même généralité, mais a lieu entre x, y et y' seuls quel que soit C. C'est une équation différentielle. Elle exprime, par exemple, une propriété géométrique commune à toutes les courbes représentées par l'équation (**1**), C restant quelconque.

L'équation (**1**) qui renferme une constante arbitraire, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation (**3**). On voit ainsi que l'intégration d'une équation du premier ordre a pour effet d'introduire une constante arbitraire. La généralité de ce résultat sera établie dans le paragraphe suivant.

169. Exemple. — Soit l'*équation des coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a+C} + \frac{y^2}{b+C} = 1.$$

On en tire

$$\frac{x}{a+C} + \frac{yy'}{b+C} = 0$$

et, en résolvant ce système par rapport à $1 : (a + C)$ et $1 : (b + C)$,

$$\frac{1}{a+C} = \frac{y'}{x^2y' - xy}, \qquad \frac{1}{b+C} = \frac{1}{y^2 - xyy'},$$

d'où, l'équation différentielle de ces coniques

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a + b}{xy} y' - 1 = 0.$$

170. Formation d'équations du deuxième ordre. — Considérons maintenant une équation avec deux constantes arbitraires

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0. \tag{4}$$

Si l'on dérive une première fois, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{5}$$

Généralement il est impossible d'éliminer C_1 et C_2 entre (**4**) et (**5**), auquel cas il n'existe aucune relation sans constante arbitraire entre x, y et y'. On dit alors que les deux constantes sont *distinctes*, et pour les éliminer, il faut dériver une fois de plus, ce qui introduit y''. L'élimination des constantes conduira donc à une équation différentielle du second ordre.

Pour former cette équation, on peut aussi faire l'élimination de proche en proche. On élimine d'abord une des constantes, C_2 par exemple, entre (**4**) et (**5**), ce qui suppose que (**5**) renferme encore les deux constantes, sinon l'élimination serait toute faite. On a de la sorte une relation

$$(6) \qquad f_1(x, y, y', C_1) = 0,$$

qui renferme encore une constante arbitraire.

Maintenant on peut éliminer C_1 entre (**6**) et sa dérivée, ce qui fournit l'équation cherchée.

$$(7) \qquad f_2(x, y, y', y'') = 0.$$

Celle-ci, qui ne renferme plus de constante arbitraire, a au moins la même généralité que les précédentes.

La relation (**7**) est la seule relation indépendante des constantes arbitraires (supposées distinctes) qui puisse exister entre x, y, y' et y'', car, s'il en existait une autre, en éliminant y'' entre elles deux, on trouverait une relation sans constante entre x, y et y', ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation (**7**) est une équation différentielle du second ordre; l'équation (**6**) est du premier ordre, mais contient une constante arbitraire : c'est une *intégrale première* de l'équation (**7**). Enfin l'équation (**4**) qui contient deux constantes arbitraires est son *intégrale générale*.

On prévoit d'après cela que l'intégration d'une équation du second ordre doit introduire deux constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

171. Formation d'équations d'ordre quelconque. — Ces résultats se généralisent aisément. Soit une équation avec n constantes

$$(8) \qquad F(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0.$$

Si on la dérive $n-1$ fois de suite, on forme $(n-1)$ équations nouvelles et l'on a en tout n équations entre les n constantes et $x, y, y', \dots y^{n-1}$. On dit que les constantes sont *distinctes* si l'élimination des n constantes entre ces n équations est impossible, ou s'il n'existe pas de relation sans constante arbitraire entre $x, y, y', \dots y^{n-1}$. Mais, si l'on dérive une fois de plus, on a $(n+1)$ équations entre lesquelles on peut éliminer les n constantes, ce qui conduit à une relation entre $x, y, y', \dots y^n$.

Pour former cette relation, on peut d'ailleurs faire l'élimination de proche en proche. En éliminant C_n entre $F = 0$ et sa dérivée, on trouve

$$f_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = 0,$$

De même, en éliminant C_{n-1} entre $f_1 = 0$ et sa dérivée,

$$f_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots C_{n-2}) = 0.$$

Après n opérations analogues, on obtiendra

$$f_n(x, y, y', \ldots y^n) = 0, \tag{9}$$

Cette relation est la seule qui puisse exister entre $x, y, y', \ldots y^n$ sans constante arbitraire, car s'il y avait deux relations distinctes, on en déduirait une autre entre $x, y, \ldots y^{n-1}$ seulement et les constantes ne seraient pas distinctes.

L'équation (**9**) est une équation différentielle de l'ordre n. Les équations successives $f_{n-1} = 0$, $f_{n-2} = 0, \ldots f_1 = 0$, qui renferment chaque fois une dérivée de moins et une constante arbitraire de plus, sont des *intégrales premières, secondes,.., $(n-1)^{me}$* de l'équation (**9**). Enfin l'équation $F = 0$, qui a lieu entre x et y seuls et renferme n constantes arbitraires, est son *intégrale générale.*

On conçoit donc que l'intégration d'une équation de l'ordre n aura généralement pour effet d'introduire n constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

172. Exemples. — 1° *L'équation générale des cercles*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

contient trois constantes arbitraires. Leur équation différentielle sera donc du 3e ordre. Pour l'obtenir, dérivons d'abord deux fois de suite, il vient

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0.$$

Divisons par y'' et dérivons une dernière fois, on a

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)' + y' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 3\,y'y''^2 = (1 + y'^2)\,y'''$$

2° *L'équation générale des coniques* étant

$$y = ax + b + \sqrt{px^2 + 2\,qx + r},$$

leur équation différentielle a éte obtenue par Halphen comme il suit : En dérivant deux fois, il vient

$$y' = a + \frac{px + q}{\sqrt{px^2 + 2qx + r}}, \qquad y'' = \frac{pr - q^2}{(px^2 + 2qx + r)^{3/2}}$$

d'où

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{(pr - q^2)^{2/3}}, \qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Dans le cas de la parabole, $p = 0$; l'équation se réduit au 4e ordre

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Si l'on effectue les dérivations indiquées et qu'on chasse les dénominateurs, on trouve, pour l'équation différentielle des coniques,

$$40y'''^3 - 45\, y''\, y'''\, y^{\text{iv}} + 9y''^2\, y^{\text{v}} = 0.$$

et, pour celle des paraboles,

$$5\,y'''^2 - 3\,y''\, y^{\text{iv}} = 0,$$

§ 2. Généralités sur les intégrales des équations différentielles, Théorèmes d'existence.

173. Considérations préliminaires. — Soit une équation du 1er ordre

$$y' = f(x, y).$$

Intégrer cette équation, c'est trouver toutes les fonctions y de x qui la vérifient. Au point de vue géométrique, c'est trouver toutes les courbes dont la tangente possède, en chaque point (x, y), la direction déterminée par cette équation.

La première question qui se pose est de savoir si le problème admet des solutions et combien il en admet. L'interprétation géométrique fait prévoir la réponse.

En effet, imaginons qu'une *courbe intégrale,* c'est-à-dire satisfaisant à l'équation $y' = f(x, y)$, soit décrite par un point mobile. Dans chacune de ses positions successives, ce point marche dans une direction imposée par cette équation. On conçoit aisément que son mouvement sera déterminé de proche en proche, mais le point de départ reste arbitraire. Il existera donc une infinité de courbes répondant à la question, chacune d'elles étant déterminée par un de ses points considéré comme *initial*. Par conséquent, il existera aussi une infinité d'intégrales ou de fonctions y satisfaisant à l'équation. Une intégrale sera déterminée par sa valeur initiale y_0 pour $x = x_0$, mais cette valeur reste arbitraire.

Considérons maintenant deux équations simultanées entre deux fonctions y et z de x :

$$y' = f_1(x, y, z), \qquad z' = f_2(x, y, z).$$

Au point de vue géométrique, intégrer le système c'est trouver toutes les courbes de l'espace dont la tangente possède, en chaque point (x, y, z) de la courbe, la direction définie par ces équations. Un point qui décrit une *courbe intégrale* marche donc dans une direction qui est définie à chaque instant par la position actuelle de ce point, ce qui déterminera généralement le mouvement, sauf que la position initiale du point mobile reste arbitraire. On conçoit donc qu'il existe une infinité de courbes répondant à la question, chacune d'elles étant déterminée par un de ses points. Au point de vue analytique, il existe donc une infinité d'intégrales ou de couples de fonctions y, z satisfaisant aux équations proposées ; chaque intégrale est déterminée par ses valeurs *initiales* y_0 et z_0 pour $x = x_0$, valeurs qui restent arbitraires.

Si l'on considère plus de deux équations simultanées, la représentation géométrique fait défaut, mais les conclusions se généralisent d'elles-mêmes.

Les raisonnements précédents sont dépourvus de valeur démonstrative, mais ils font nettement saisir la nature du problème. Ils facilitent l'intelligence des démonstrations rigoureuses qui suivent et qui vont mettre en lumière les conditions sous lesquelles les conclusions précédentes sont exactes.

174. Existence de l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre. — Considérons l'équation différentielle du premier ordre, *de la forme normale*, c'est-à-dire résolue par rapport à la dérivée de la fonction inconnue,

$$y' = f(x, y). \qquad (1)$$

Pour pouvoir établir qu'elle admet une intégrale déterminée d'une manière univoque par sa valeur initiale y_0, il faut admettre certaines conditions. Nous allons introduire, à cet effet, les conditions d'une grande généralité connues sous le nom de *conditions de Lipschitz*.

Conditions de Lipschitz. — Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction de x, y (et éventuellement d'autres variables encore) qui varient dans un domaine D, on dit que *f satisfait à la condition de Lipschitz relativement à y* si l'on peut assigner une constante positive M telle que l'on ait, $x, y, \ldots$ et $x, Y, \ldots$ étant deux points du domaine D dont les y seuls diffèrent,

$$| f(x, Y, \ldots) - f(x, y, \ldots) | < M \mid Y - y \mid.$$

Cette condition [1] sera évidemment réalisée en particulier, si f admet une dérivée partielle f'_y bornée dans le domaine D, pourvu que la frontière de ce domaine ne soit coupée qu'en deux points par une parallèle de l'axe des y. C'est alors la conséquence immédiate de la formule des accroissements finis et l'on peut choisir pour M la borne supérieure de $|f'_y|$.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si la fonction $f(x, y)$ est continue et uniforme, si elle satisfait à la condition de Lipschitz relativement à y dans un domaine* D *et qu'on désigne par x_0, y_0 un point intérieur de ce domaine, l'équation* (2) *admet une intégrale $y = \mathrm{F}(x, y_0)$ et une seule prenant la valeur initiale y_0 pour $x = x_0$, et cette intégrale est fonction continue de y_0 (x_0 restant fixe).*

Soit L le maximum de $|f|$ dans D ; soient ensuite a et b deux nombres positifs tels que le rectangle R, limité par les valeurs $x_0 \pm a$ de x et $y_0 \pm b$ de y, soit intérieur à D. Donnons-nous un nombre positif δ inférieur aux trois quantités a, $b : \mathrm{L}$ et $1 : \mathrm{M}$ où M est la constante de la condition de Lipschitz. Faisons alors varier x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nous aurons la suite de propositions suivantes, qui établissent le théorème :

I. *Soit y une fonction continue de x ayant la valeur initiale y_0. Si cette fonction a une dérivée continue y' et vérifie l'équation différentielle sauf une erreur ω de module $< \varepsilon$ fixe, c'est à dire si l'on a*

$$(2) \qquad y' = f(x, y) + \omega, \qquad |\omega| < \varepsilon,$$

cette condition pouvant cependant tomber en défaut pour un nombre limité de valeurs exceptionnelles de x, alors le point x, y restera dans le rectangle R *pourvu que ε soit assez petit.*

En effet, même s'il y a des points exceptionnels, on peut intégrer l'équation (2) de x_0 à x, et il vient

$$(3) \qquad y - y_0 = \int_{x_0}^{x} [f(x,y) + \omega]\, dx.$$

Tant que x, y est dans R, $|f|$ est $< \mathrm{L}$; on tire donc de l'équation (3)

$$|y - y_0| < \int_{x_0}^{x_0+\delta} (\mathrm{L} + \varepsilon)\, dx = \mathrm{L}\delta + \varepsilon\delta.$$

[1] Cette condition revient à stipuler que les nombres dérivés de f par rapport à y sont bornés.

Comme $L\delta$ est $< b$, $L\delta + \varepsilon\delta$ l'est aussi, pourvu que ε soit assez petit. Alors $|y - y_0|$ est $< b$ et, comme d'ailleurs $|x - x_0|$ est $\leqq \delta < a$, le point x, y ne peut atteindre le bord du rectangle R, ni *a fortiori* en sortir.

II. *Si deux fonctions continues y et Y, dérivables sauf peut être en un nombre limité de points, ont la même valeur initiale y_0 et vérifient l'équation différentielle aux points où la dérivée existe sauf une erreur $< \varepsilon$ fixe, leur différence $Y - y$ est aussi petite qu'on veut avec ε et le rapport $|Y - y| : \varepsilon$ reste inférieur à un nombre fixe quand ε tend vers* 0.

Soient ω et ω' les erreurs relatives à y et Y. En soustrayant l'une de l'autre les deux équations analogues à (**3**), il vient

$$Y - y = \int_{x_0}^{x} [f(x, Y) - f(x, y) + \omega' - \omega]\, dx.$$

Mais, la condition de Lipschitz ayant lieu, on a

$$|f(x, Y) - f(x, y)| < M\,|Y - y|.$$

Donc, si l'on désigne par μ le maximum de $|Y - y|$ dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, on tire de l'équation précédente ($M\delta$ étant < 1)

$$\mu < \int_{x_0}^{x_0 - \delta} (M\mu + 2\varepsilon)\, dx = M\mu\delta + 2\varepsilon\delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\delta}{1 - \delta M},$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

III. *Quelque petit que soit ε positif, on peut définir une fonction continue $\varphi(x)$, ayant une dérivée continue sauf en des points isolés, et qui vérifie l'équation différentielle aux points où la dérivée existe, sauf une erreur ω de module $< \varepsilon$.*

En effet, partageons le rectangle R en éléments rectangulaires α suffisamment petits pour que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans chacun d'eux. Partant alors du point x_0, y_0 avec le coefficient de direction $f(x_0, y_0)$, décrivons une ligne polygonale dont la direction ne change qu'à la rencontre des frontières des éléments rectangulaires α, le coefficient de direction devenant à chaque rencontre la valeur de $f(x, y)$ au point de rencontre. Nous traçons ainsi, sans ambiguités, une ligne polygonale ayant tous ses sommets sur les frontières des α et dont l'ordonnée $y = \varphi(x)$ est une fonction qui satisfait à l'énoncé de la proposition III.

IV. *Si* ε *tend vers* 0, $\varphi(x)$ *tend uniformément vers une intégrale* $F(x)$ *de l'équation différentielle, ayant la valeur initiale* y_0.

En effet, quand ε tend vers 0, les fonctions φ correspondantes se rapprochent indéfiniment les unes des autres et tendent uniformément vers une limite F, en vertu de la proposition II. Or, par hypothèse, on a, pour chaque φ,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(x, \varphi) + \omega]\, dx. \qquad |\omega| < \varepsilon.$$

Faisons tendre ε vers 0 et, par conséquent, φ *uniformément* vers F ; il vient, à la limite,

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, F)\, dx.$$

Cette formule montre que F est une fonction continue qui a pour valeur initiale y_0 et, en la dérivant, que F est une intégrale.

V. *Si une fonction y vérifie l'équation différentielle sauf une erreur* $< \varepsilon$, *sa différence* $F - y$ *avec l'intégrale de même valeur initiale* y_0 *est aussi petite que l'on veut avec* ε *et le rapport* $|F - y| : \varepsilon$ *reste fini quand* ε *tend vers* 0.

Cette proposition qui comporte évidemment que l'intégrale est unique, est un cas particulier de II, car on peut considérer l'intégrale comme une fonction qui vérifie l'équation différentielle sauf une erreur nulle.

VI. *L'intégrale de l'équation* (1) *est une fonction continue* $F(x, y_0)$ *de sa valeur initiale* y_0 *pour* $x = x_0$. *De plus, le rapport des accroissements correspondants*, $\Delta F : \Delta y_0$, *conserve une valeur finie quand* Δy_0 *tend vers* 0.

Soient y et Y les intégrales $F(x, y_0)$ et $F(x, y_0 + \Delta y_0)$. Alors $Y - \Delta y_0$ est une fonction continue de x, ayant la valeur initiale y_0, qui vérifie l'équation différentielle, sauf l'erreur

$$f(x, Y) - f(x, Y - \Delta y_0)$$

de module moindre que $M\, |\Delta y_0|$, en vertu de la condition de Lipschitz. Cette erreur est un infiniment petit du même ordre au moins que Δy_0 ; donc, par la proportion V du n° précédent, $Y - \Delta y_0$ et, par suite, Y sont infiniment voisins de y ; enfin, par la même proposition,

la différence $Y - y = \Delta F$ est un infiniment petit dont le rapport à Δy_0 reste fini.

Remarque. — Les propositions IV, V, VI précédentes ne sont encore établies que dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de x, mais elles subsistent tant que le point x, y qui décrit l'intégrale ne tend pas vers la frontière du domaine D. En effet, l'étude de l'intégrale peut se prolonger au delà de l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en prenant comme nouvelles valeurs initiales les valeurs obtenues aux extrémités de cet intervalle, et ainsi de proche en proche tant qu'on n'atteint pas la frontière du domaine D. Les propositions se généralisent en tenant compte du théorème VI.

La même remarque est à faire pour compléter les démonstrations du numéro suivant. Nous n'y reviendrons plus.

175. Propriétés de l'intégrale considérée comme fonction de divers paramètres. — Soit, en général.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$$

une équation différentielle qui dépend d'un ou plusieurs paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ Considérons aussi la valeur initiale y_0 comme fonction continue de paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ qui peuvent être ou non les mêmes que les précédents. L'intégrale elle-même sera donc une fonction $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ de x et des paramètres. Nous allons étudier ses propriétés comme fonction de ces paramètres.

Théorème I. — *Tant que le point $x, y, \alpha, \beta, \ldots$ ne sort pas d'un domaine où $f(x, y, \alpha, \beta)$ est fonction continue de $x, y, \alpha, \ldots$ et satisfait à la condition de Lipschitz relativement à y, l'intégrale* $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ *est fonction continue de $x, \alpha, \beta, \ldots$*

Donnons-nous un système de valeurs des paramètres, ce qui détermine y_0, et faisons varier x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ considéré au nº précédent.

Soient y et Y les intégrales $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ et $F(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots)$ où $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots$ sont des accroissements infiniment petits. Soit Δy_0 l'accroissement correspondant de y_0. Alors $Y - \Delta y_0$ est une fonction continue de x, ayant la valeur initiale y_0 et qui vérifie l'équation

$$y' = f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$$

sauf l'erreur

$$f(x, Y, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - f(x, Y - \Delta y_0, \alpha, \beta, \ldots),$$

qui est infiniment petite dans notre hypothèse. Donc, par la proposition V du n° précédent, $Y - \Delta y_0$ et, par suite, Y sont infiniment voisins de l'intégrale y.

Théorème II. — *Si, de plus, y_0 et $f(x, y, \alpha, \beta, \ldots)$ admettent des dérivées premières bornées par rapport à l'un des parametres, α par exemple, alors, si α seul varie, le rapport des accroissements correspondants* $\Delta F : \Delta\alpha$ *reste fini quand $\Delta\alpha$ tend vers* 0.

En effet, dans cette hypothèse, le rapport à $\Delta\alpha$ de l'erreur que nous venons d'examiner reste fini et il suffit d'appliquer la proposition V du n° précédent.

Théorème III. — *Si, de plus, ces dérivées premières de y_0 et f par rapport à α sont continues, l'intégrale $F(x, \alpha, \beta, \ldots)$ admet, par rapport à α, des dérivées premières fonctions continues de x, α, $\beta, \ldots$*

Soient, en effet, F et $F + \Delta F$ les intégrales qui correspondent aux valeurs α et $\alpha + \Delta\alpha$, les autres paramètres ne changeant pas. Soustrayant membre à membre les équations vérifiées par F et $F + \Delta F$ et appliquant la formule de Taylor, il vient $(0 < \theta < 1)$

$$\begin{aligned}(\Delta F)' &= f(x, F + \Delta F, \alpha + \Delta\alpha, \ldots) - f(x, F, \alpha, \ldots) \\ &= \Delta F\, f'_y(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots) + \Delta\alpha\, f'_\alpha(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots)\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{\Delta F}{\Delta\alpha}\right)' = \frac{\Delta F}{\Delta\alpha} f'_y(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots) + f'_\alpha(x, F + \theta\Delta F, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots)$$

Mais, si $\Delta\alpha$ est infiniment petit, ΔF l'est aussi et le rapport $\Delta F : \Delta\alpha$ est borné en vertu du théorème précédent. Donc $\Delta F : \Delta\alpha$ vérifie l'équation différentielle entre u et x

$$u' = u\, f'_y(x, F, \alpha, \beta, \ldots) + f'_\alpha(x, F, \alpha, \beta, \ldots),$$

sauf une erreur infiniment petite, et tend, par conséquent, vers l'intégrale de cette équation qui a la même valeur initiale-limite $\dfrac{\partial y_0}{\partial \alpha}$ en vertu des propositions V et VI du n° précédent. Comme enfin cette intégrale est fonction continue de $x, \alpha, \beta, \ldots$ par le théorème I qui précède, la proposition est établie.

Théorème IV. — *Si, en plus des conditions du théorème* I, *les déri-*

vées de f et de y_0 par rapport à y et à un certain nombre des paramètres $\alpha, \beta,\ldots$ existent et sont continues jusqu'à l'ordre n, l'intégrale $F(x, \alpha, \beta,\ldots)$ *admet aussi, par rapport aux mêmes paramètres, des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.*

Supposons, pour fixer les idées, que la première dérivation se fasse par rapport à α ; le théorème se réduit au précédent pour $n = 1$. Pour l'établir en général, supposons le vrai pour $n - 1$ et montrons qu'il subsiste pour n.

Dans cette hypothèse, il est déjà établi que, sous les conditions du théorème IV, $F(x, \alpha, \beta,\ldots)$ est dérivable par rapport aux $\alpha, \beta,\ldots$ considérés jusqu'à l'ordre $n - 1$. Mais alors les conditions analogues à celles du théorème IV ont lieu jusqu'à l'ordre $n - 1$ pour l'équation différentielle entre u et x (les $\alpha, \beta,\ldots$ entrant dans F) :

$$u' = u\, f'_y(x, \alpha, \beta,\ldots) + f'_\alpha(x, \alpha, \beta,\ldots),$$

dont l'intégrale F'_α a sa valeur initiale $\dfrac{\partial y_0}{\partial \alpha}$ dérivable en $\alpha, \beta,\ldots$ par hypothèse, jusqu'à l'ordre $n - 1$. Donc, le théorème étant supposé vrai pour $n - 1$, cette intégrale, F'_α, admet, par rapport aux $\alpha, \beta,\ldots$ considérés des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $n - 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On peut supposer, en particulier, que les paramètres $\alpha, \beta,\ldots$ n'entrent pas dans y_0 et prendre y_0 lui-même comme paramètre. Celui-ci n'entrant pas dans les f, on obtient le théorème suivant :

Théorème V. — *Si, en plus des conditions du théorème* I, *les dérivées partielles de $f(x, y\,;\, \alpha,\ldots)$ par rapport à y existent et sont continues jusqu'à l'ordre n, les dérivées partielles par rapport à y_0 de l'intégrale* $F(x, y_0, \alpha,\ldots)$ *existent aussi et sont continues jusqu'au même ordre.*

176. Existence de l'intégrale d'un système d'équations différentielles de la forme normale. — Soient $x_1, x_2\ldots x_n$, n fonctions inconnues d'une variable indépendante t ; soient $f_i(t, x_1, x_2,\ldots x_n)$ ou, en abrégé, $f_i(t, x)$ n fonctions données de ces variables ($i = 1, 2\ldots n$). Le système d'équations

$$(4) \qquad x'_i = f_i(t, x), \qquad (i = 1, 2,\ldots n)$$

résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues est *un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre de la forme normale.*

Conditions de Lipschitz. — Supposons que les variables t, x varient dans un domaine D, nous disons qu'une fonction $f_i(t, x)$ satisfait à la condition de Lipschitz relativement à l'ensemble des variables x, si l'on peut assigner une constante positive M_i telle que, étant donnés deux points quelconques t, x_1, x_2, x_n et $t, X_1, X_2, \ldots X_n$ dans le domaine D, on ait

$$| f_i(t, X) - f_i(t, x) | < M_i \sum_{k=1}^{n} | X_k - x_k |.$$

Cette condition aura lieu, en particulier, dans tout domaine où les fonctions f_i auront leurs dérivées partielles par rapport aux x bornées, à condition de supposer ce domaine convexe, c'est à dire tel que s'il contient deux points il contient aussi le segment de droite de l'hyperespace qui les réunit.

Théorème fondamental. — *Soit t_0, x_{i0} un point pris dans l'intérieur d'un domaine* D, *si les fonctions f_i sont continues et uniformes dans ce domaine* D, *si, de plus, elles satisfont à la condition de Lipschitz relativement aux variables x, le système des équations* (4) *admet, dans ce domaine, un système d'intégrales et un seul $x_i = F_i(t, x_{i0})$ ayant les valeurs initiales x_{i0} pour $t = t_0$, et ces intégrales sont des fonctions continues des valeurs initiales x_{i0}, t_0 restant fixe.*

Ce théorème se démontre par une suite de propositions, qui généralisent celles du n° 174 et que nous nous contenterons d'énoncer quand cette généralisation est immédiate.

Soient L le maximum des quantités $| f_i |$ dans le domaine D, M la plus grande des constantes M_i qui interviennent dans les conditions de Lipschitz. Soient ensuite a et b deux nombres positifs tels que le domaine R borné par valeurs $t_0 \pm a$ de t et $x_{i0} \pm b$ de x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ soit intérieur au domaine D. Choisissons un nombre positif δ inférieur aux trois quantités a, $b : L$ et $1 : nM$. Faisons alors varier t entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$. Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

I. *Si le système des fonctions x_i de t, ayant les valeurs initiales x_{i0}, vérifie les équations différentielles sauf une erreur $< \varepsilon$ pour chaque équation (un nombre limité de points d'exception étant possible), le point (t, x) ne sortira pas de* R, *pourvu que ε soit assez petit.*

II. *Si les deux systèmes de fonctions x_i et X_i, ayant les valeurs ini-*

tiales x_{i0}, vérifient les équations différentielles sauf une erreur $< \varepsilon$ (un nombre limité de points d'exception étant possible), les différences $X_i - x_i$ sont aussi petites qu'on veut avec ε, et les rapports $| X_i - x_i | : \varepsilon$ restent inférieurs au nombre fixe $2\delta : (1 - n\delta M)$ si ε tend vers 0.

Soient ω_i et ω'_i les erreurs relatives à x_i et X_i ; on a

$$X_i - x_i = \int_{t_0}^{t} [f_i(t, X) - f_i(t, x) + \omega'_i - \omega_i] dt.$$

Soit μ le maximum de toutes les différences $| X - x |$ dans l'intervalle $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, on aura, puisque les f_i satisfont à la condition de Lipschitz,

$$| f_i(t, X) - f_i(t, x) | < M\sum_i | X_i - x_i | < Mn\mu.$$

Par conséquent, $| t - t_0 |$ restant $< \delta$ et $nM\delta$ étant < 1, on tire de l'équation précédente

$$\mu < \int_{t_0}^{t_0-\delta} (Mn\mu + 2\varepsilon)\, dt = Mn\mu\delta + 2\varepsilon\delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mu}{\varepsilon} < \frac{2\delta}{1 - nM\delta}.$$

III. *Quelque petit que soit ε positif, on peut définir un système de fonctions $x_i = \varphi_i(t)$, dérivables sauf en un nombre limité de points exceptionnels, ayant les valeurs initiales x_{i0}, et qui vérifient les équations différentielles partout où les dérivées existent, sauf une erreur $< \varepsilon$ pour chaque équation.*

En effet, partageons le domaine R en éléments α suffisamment petits pour que les oscillations des fonctions f_i soient $< \varepsilon$ dans tous ces éléments. Partant alors du point t_0, x_{i0} avec les coefficients de direction $f_i(t_0, x_0)$ traçons dans l'hyperespace R une ligne polygonale dont la direction ne change qu'à la rencontre des frontières des éléments α, les coefficients de direction devenant après chaque rencontre les valeurs des fonctions $f(t, x)$ au point de rencontre. Les coordonnées x_i seront, le long de cette ligne polygonale, des fonctions, $x_i = \varphi_i(t)$, qui satisfont à l'énoncé de la proposition III.

IV. *Si ε tend vers 0, les fonctions $\varphi_i(t)$ tendent uniformément vers un système d'intégrales $F_i(t)$ ayant les valeurs initiales x_{i0}.*

V. *Tout système de fonctions x_i de t ayant les valeurs initiales x_{i0} et*

vérifiant les équations différentielles, sauf une erreur $< \varepsilon$ *pour chaque équation, diffère aussi peu qu'on veut du système des intégrales* F_i *en supposant* ε *assez petit. Enfin les quotients* $| F_i - x_i | : \varepsilon$ *restent* $< 2\delta : (1 - n M \delta)$ *quand* ε *tend vers* 0,

VI. *Les intégrales* $F_i(t, x_{i0})$ *sont des fonctions continues des valeurs initiales* x_{i0} *et, si l'une d'elles seulement* x_{i0} *varie, le rapport des accroissements correspondants* $\Delta F : \Delta x_{i0}$ *conserve une valeur finie quand* Δx_{i0} *tend vers* 0.

177. Propriétés des intégrales considérées comme fonctions de certains paramètres.—L'analyse des nos 174-175 a été présentée sous une forme qui se généralise d'elle-même. On obtient ainsi au lieu des propositions IV et V du no 175 les deux théorèmes suivants :

I. *Si les valeurs initiales* x_{i0} *et les fonctions* $f(t, x)$ *dépendent encore de paramètres* $\alpha, \beta, \ldots$ *mais que leurs dérivées partielles par rapport à un certain nombre de ces paramètres et aux variables* x *existent et soient continues jusqu'à l'ordre* n, *les intégrales* $F_i(t, \alpha, \beta, \ldots)$ *admettent par rapport aux mêmes paramètres des dérivées partielles continues jusqu'au même ordre.*

En particulier, si l'on prend les valeurs initiales comme paramètres, ce théorème donne le suivant :

II. *Si les dérivées partielles des fonctions* $f(t, x)$ *par rapport à un certain nombre des variables* x_i *existent et sont continues jusqu'à l'ordre* n, *les dérivées partielles des intégrales* $F_i(t, x_{i0})$ *par rapport aux valeurs initiales* x_{i0} *des mêmes* x, *existent aussi et sont continues jusqu'à l'ordre* n.

178. Subdivision des intégrales en générales, particulières, singulières. — 1°) Soit d'abord *une seule équation du premier ordre*

$$y' = f(x, y),$$

où f est une fonction uniforme.

On a vu qu'on peut se donner arbitrairement la valeur y_0 de y pour $x = x_0$. La solution doit donc dépendre d'une constante arbitraire (qui peut être, en particulier, y_0). Une fonction y de x (ou une équation définissant y) qui satisfait à l'équation différentielle et qui dépend d'une constante arbitraire C, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation

différentielle. Mais il faut pour cela que la constante C permette d'attribuer à y une valeur arbitraire y_0 pour $x = x_0$. Toute intégrale qu'on déduit de l'intégrale générale par une détermination spéciale de la constante est une *intégrale particulière.*

Dans tout domaine où se vérifient les conditions de continuité du théorème d'existence (n° 174), en particulier dans un domaine où f et f'_y sont continues, *l'intégrale générale donne la solution complète du problème de l'intégration*, car il ne peut passer qu'une seule intégrale par chaque point (x_0, y_0) : celle-ci se confond donc nécessairement avec l'intégrale particulière passant par ce point.

Mais, dans un domaine où les conditions de continuité n'ont plus lieu, l'équation peut admettre exceptionnellement des intégrales, ne rentrant pas dans l'intégrale générale, auxquelles on donne le nom d'*intégrales singulières.*

2°) Soit un système de *n équations différentielles simultanées* entre une variable indépendante t et n fonctions $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Comme on peut se donner arbitrairement les valeurs initiales des fonctions x pour $t = t_0$, la solution doit dépendre de n constantes arbitraires. On donne le nom d'*intégrale générale* à une solution (c'est-à-dire un système de n fonctions x ou de relations servant à les définir) qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, et l'on entend par ce mot que les constantes arbitraires permettent d'attribuer aux x des valeurs arbitraires pour $t = t_0$.

Les intégrales qui sont comprises dans l'intégrale générale par une détermination spéciale des constantes sont des *intégrales particulières.*

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les conditions du théorème fondamental sont vérifiées. Mais, dans un domaine où ces conditions viennent à manquer, il peut exister exceptionnellement des *intégrales singulières* non comprises dans l'intégrale générale.

3°) Soit enfin *une équation de l'ordre n*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}),$$

résolue par rapport à la plus haute dérivée. Elle se ramène à un système du premier ordre en désignant par $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ les $(n - 1)$ premières dérivées de y, considérées comme autant d'inconnues.

Ce système sera

$$(i = 1, 2, \ldots n - 2) \quad \begin{cases} y' = p_1 \\ p'_i = p_{i+1} \\ p'_{n-1} = f(x, y, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}) \end{cases}$$

On peut donc se donner arbitrairement y et ses $n - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$. L'*intégrale générale* est une solution qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, c'est-à-dire permettant de donner à y et à ses $n - 1$ premières dérivées des valeurs initiales arbitraires pour $x = x_0$. Le nombre des constantes est donc égal à l'ordre de l'équation. En leur donnant des valeurs spéciales, on obtient des *intégrales particulières*.

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les conditions du théorème fondamental ont lieu (donc, en particulier, dans tout domaine où f et ses dérivées par rapport à y, y',... y^{n-1} sont continues). Si ces conditions viennent à manquer, il pourra exister des *intégrales singulières* non comprises dans l'intégrale générale.

L'étude des intégrales singulières ne peut se faire d'une manière satisfaisante qu'en se plaçant au point de vue des fonctions analytiques. Nous ne nous en occuperons pas pour le moment.

§ 3. Equations du 1er ordre et du 1er degré. Facteur intégrant

179. On dit communément qu'*on sait intégrer* une équation quand son intégration se ramène à des quadratures. En ce sens, il n'y a qu'un petit nombre d'équations que l'on sache intégrer. Nous allons examiner les principales. Nous commencerons par celles qui sont du premier degré par rapport à la dérivée de la fonction inconnue. Nous supposerons que cette fonction soit y ; mais il est clair qu'on pourrait aussi bien considérer x comme fonction inconnue de y et c'est ce que l'on doit souvent faire en pratique pour être ramené à l'un des types que nous allons examiner.

180. **Equations qui sont différentielles exactes (ou immédiatement intégrables).** — Si l'équation est du premier degré en $dy : dx$, on peut la mettre sous la forme

$$(1) \qquad \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy = 0.$$

où P et Q sont des fonctions données de x, y. On dit que l'équation est *immédiatement intégrable* si son premier membre est une différentielle totale exacte. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que l'on ait $P'_y = Q'_x$ (n° 67). Si elle a lieu, le premier membre est la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$; l'équation revient à $dF = 0$; son intégrale sera donc $F =$ const., ou, en développant (n° 67),

$$\int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C.$$

C'est l'intégrale générale et il n'y a pas de solution singulière.

Exemples. Voici trois équations avec leurs intégrales en regard :

$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0,$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$;
$\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0,$	$\dfrac{y}{x} = \cot(C - \sqrt{1 + x^2 + y^2})$;
$\dfrac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0,$	$y^2 = C^2 - 2Cx.$

181. Séparation des variables. — L'équation (**1**) est immédiatement intégrable si les *variables sont séparées*, c'est-à-dire si P est une fonction X de x seul et Q est une fonction Y de y seul, car on a, dans ce cas, $X'_y = Y'_x = 0$. L'équation prend alors la forme

$$Xdx + Ydy = 0, \tag{2}$$

et elle a pour intégrale générale

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C.$$

Considérons maintenant les équations du type

$$XYdx + X_1Y_1dy = 0 \tag{3}$$

où X, X_1 sont fonctions de x, Y et Y_1 fonctions de y seuls.

On dit qu'elles s'intègrent par *séparation de variables*. Il suffit, en effet, de les multiplier par le facteur $1 : X_1Y$ pour les ramener à la forme

$$\frac{X}{X_1}\,dx + \frac{Y_1}{Y}\,dy = 0,$$

et les variables sont séparées.

En intégrant cette équation, on obtiendra l'intégrale générale de (**3**). Toutefois il restera à vérifier si l'on n'a pas supprimé de solution annulant le facteur X_1 ou le facteur Y.

Les solutions des équations $X_1 = 0$ et $Y = 0$ sont des valeurs constantes $x = \alpha$ ou $y = \beta$. Ce sont aussi des solutions de l'équation (3) dont elles annulent les deux termes et elles peuvent être acceptables, car, au point de vue géométrique, elles correspondent à des droites parallèles aux axes.

Exemples. Voici trois équations avec leurs intégrales en regard :

$(1+x^2)\,y^3\,dx + (1-y^2)\,x^3\,dy = 0,$	$x^{-2} + y^{-2} = 2\,\mathrm{Log}\,(Cx : y)$
$(a^2+y^2)\,dx = 2x\sqrt{ax-a^2}\,dy,$	$y - \sqrt{ax-a^2} = C(a^2 + y\sqrt{ax-a^2})$
$\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dx + \sec^2 y\,\mathrm{tg}\,x\,dy = 0,$	$\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y = C.$

182. Equations homogènes. — Si les fonctions P et Q de x, y sont homogènes et du même degré, l'équation

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

est une *équation homogène.* Dans ce cas, le quotient P : Q ne dépend que du rapport $y : x$. L'équation. résolue par rapport à y', se ramène donc au type

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Les variables deviennent séparables en changeant d'inconnue par la substitution

$$y = ux, \qquad \text{d'où} \qquad y' = u + xu'.$$

L'équation entre u et x sera, en effet,

$$xu' = \varphi(u) - u\,; \tag{5}$$

d'où, en divisant par $x\,[\varphi(u) - u]$ et en multipliant par dx,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}\,; \qquad \mathrm{Log}\,x = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C.$$

On obtiendra l'*intégrale générale* de (4) en remplaçant u par $y : x$ dans l'équation précédente.

On trouve aussi des solutions en annulant le facteur supprimé $\varphi(u) - u$, ce qui donne généralement pour u un certain nombre de valeurs constantes $u = u_1$, $u = u_2$... Ces relations satisfont à l'équation (5) dont elles annulent les deux membres ; donc les relations

$$y = u_1\,x, \qquad y = u_2\,x, \ldots$$

sont des solutions de l'équation (4). Elles seront *singulières* à moins de rentrer dans l'intégrale générale.

On peut aussi intégrer les équations homogènes en les ramenant à des différentielles exactes. Nous le ferons dans le numéro suivant.

Exemples. Voici trois équations homogènes et leurs intégrales en regard :

$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}$,	$x^2 = C^2 + 2Cy$;
$(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$,	$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{Log} C\sqrt{x^2 + y^2})$;
$xy\,dy - y^2\,dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}$.	$(x + y) \operatorname{Log} Cx = x e^{\frac{y}{x}}$.

183. Remarques sur les équations à la fois homogènes et différentielles exactes. — 1°) Quand l'équation $P dx + Q\,dy = 0$ réunit ces deux caractères, elle s'intègre immédiatement *sans aucune quadrature*, pourvu que son degré d'homogénéité n ne soit pas -1. Posons, en effet,

$$F(x, y) = Px + Qy.$$

On aura, eu égard à l'identité $P'_y = Q'_x$ et aux propriétés des fonctions homogènes (*t.* I, n° 161),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x} = P + \left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (n + 1)\,P,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q + x\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q + \left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = (n + 1)\,Q.$$

De là l'identité

$$(6) \qquad d(Px + Qy) = (n + 1)\,(P dx + Q dy)$$

Donc, $n - 1$ n'étant pas nul, l'intégrale générale de l'équation $P dx + Q dy = 0$ sera

$$Px + Qy = C.$$

Exemples. Voici trois de ces équations et leurs intégrales en regard :

$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$,	$x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = C$;
$(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y = 0$,	$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$;
$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$,	$x + y e^{\frac{x}{y}} = C$.

2°) Supposons encore que $P dx + Q dy$ soit une différentielle exacte. Si P et Q sont homogènes de degré -1, on a $n + 1 = 0$. Donc, $Px + Qy$ ayant une différentielle totale nulle en vertu de l'équation (6), on a *identiquement* (k étant une constante déterminée)

$$Px + Qy = k,$$

on ne connaît donc plus d'intégrale *a priori* et il faut recourir à la méthode générale d'intégration.

3°) Réciproquement, si P et Q étant homogènes et de degré — 1, $Px + Qy$ se réduit identiquement à une constante k, $Pdx + Qdy$ sera une différentielle exacte. En effet, cette identité permet d'exprimer P au moyen de Q, et il vient

$$Pdx + Qdy = \frac{k - Qy}{x} dx + Qdy = k\frac{dx}{x} + (Qx) d\frac{y}{x} \cdot$$

Or Qx étant de degré 0, est une fonction $\varphi(u)$ du rapport $u = y : x$; par conséquent, on a

$$Pdx + Qdy = k \frac{dx}{x} + \varphi(u) du,$$

ce qui est une différentielle exacte,

Si, en particulier, $k = 0$, l'équation se réduit à $\varphi(u)\, du = 0$; elle n'a donc d'autre intégrale que $u =$ const. ou $y = Cx$.

4°) Toute équation homogène $Pdx + Qdy = 0$ peut être rendue différentielle exacte. Il suffit, pour cela, de la diviser par $Px + Qy$. En effet, l'équation homogène de degré — 1

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0, \tag{7}$$

est immédiatement intégrable en vertu de la remarque 3° (le nombre k étant égal à 1). Mais le degré d'homogénéité de cette équation est — 1, ce qui est le cas d'exception de la remarque 1°. N'était donc ce cas, toutes les équations homogènes s'intégreraient sans quadrature.

Le facteur, inverse de $Px + Qy$, par lequel il faut multiplier l'équation pour la rendre immédiatement intégrable, s'appelle le *facteur intégrant* de l'équation. Nous y reviendrons dans un numéro suivant.

Toutefois, si $Px + Qy$ se réduit à 0, il y a une exception, cette expression ne peut plus être l'inverse d'un facteur intégrant. On rendra l'équation différentielle exacte en la divisant par Px ou par Qy, ce qui ramène son degré à — 1 et l'on retrouve le cas 3° avec $k = 0$. L'intégrale générale sera $y = Cx$.

184. Equations réductibles aux équations homogènes. — Ce sont celles du type (A,... a,... constants)

$$y' = \varphi\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right) \tag{8}$$

1°) Si $Ab - aB$ est différent de zéro, on change les deux variables en posant

$$\begin{aligned} \eta &= Ax + By + C, \\ \xi &= ax + by + c, \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Adx + Bdy}{adx + bdy} = \frac{A + By'}{a + by'}.$$

Dans notre hypothèse, le dernier rapport n'est pas indépendant de y' (ce qui arrive si $Ab - aB = 0$) de sorte que l'équation (**8**) revient à l'équation *homogène* entre η et ξ

$$(9) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A + B\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a + b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}$$

2°) Si $Ab - aB = 0$, on change d'inconnue seulement par la relation

$$\eta = \frac{Ax + By}{A} = \frac{ax + by}{a}, \qquad \text{d'où} \quad \eta' = 1 + \frac{b}{a} y'.$$

L'équation (**8**) ne se ramène plus à une équation homogène, mais à

$$(10) \qquad \eta' = 1 + \frac{b}{a} \varphi\left(\frac{A\eta + C}{a\eta + c}\right)$$

et les variables η et x se séparent.

On aura donc à intégrer (**9**) ou (**10**). On remplacera η et ξ, ou η seulement, par leurs valeurs et l'on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (**8**).

185. Equations linéaires. — Ce sont celles qui sont linéaires en y et y', donc du type

$$(11) \qquad y' + Xy = X_1,$$

X et X_1 désignant des fonctions de x seul. Le terme X_1 s'appelle le second membre ; s'il est nul, l'équation est *sans second membre*,

1°) L'*équation linéaire sans second membre s'intègre par une seule quadrature*. En effet, elle réduit à

$$y' + Xy = 0, \qquad \text{d'où} \quad \frac{y'}{y} = -X.$$

Les variables sont séparées, l'intégrale sera

$$\operatorname{Log} y = -\int X dx + \operatorname{Log} C, \qquad \text{d'où} \quad y = Ce^{-\int X dx}$$

2°) Pour intégrer l'*équation linéaire avec second membre*, désignons

par u une intégrale particulière de l'équation sans second membre. Soit par exemple,

$$u = e^{-\int X dx}$$

et changeons de fonction inconnue par la relation

$$y = uz, \qquad \text{d'où} \qquad y' = uz' + u'z.$$

Comme $u' + Xu$ est nul par hypothèse, l'équation (**11**) se réduit à

$$uz' = X_1, \qquad \text{d'où} \qquad z' = \frac{X_1}{u}, \qquad z = C + \int \frac{X_1}{u}\, dx$$

Remplaçons maintenant dans $y = uz$ les deux facteurs u et z par les valeurs trouvées. L'intégrale générale de (**11**) sera donnée par la formule (comportant deux quadratures)

$$(12) \qquad y = e^{-\int X dx}\left[C + \int X_1\, dx\, e^{\int X dx}\right]$$

et il n'y a pas d'intégrale singulière.

Remarques. — 1°) Si l'on connaît une intégrale particulière y_1 de l'équation (**11**), son intégrale générale s'obtiendra par *une seule quadrature.* En effet, si l'on soustrait de l'équation (**11**) celle qu'on en déduit en remplaçant y par y_1, l'équation devient

$$(y - y_1)' = -X(y - y_1)$$

C'est donc une équation linéaire sans second membre par rapport à $y - y_1$ et elle a pour intégrale

$$(13) \qquad y - y_1 = Ce^{-\int X dx}$$

2°) Si l'on connaît deux intégrales particulières y_1 et y_2 de l'équation (**11**), l'intégrale générale s'obtient sans aucune quadrature : ce sera

$$(13) \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C.$$

En effet, puisque y_2 doit vérifier l'équation (**13**) pour une valeur convenable de C, le rapport de $y - y_1$ à $y_2 - y_1$ doit demeurer constant.

Exemples. — Voici quelques équations linéaires avec leurs intégrales en regard :

$y' + ay = e^{mx}$	$y = Ce^{-ax} + \dfrac{e^{mx}}{m+a}$
$y' - \dfrac{ny}{x+1} = e^{x}(x+1)^n$	$y = (x+1)^n(e^x + C)$
$y' + y\cos x = \sin x \cos x$	$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$
$y' + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$	$y = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1$

186. Equation de Bernoulli. — En multipliant par y^n le second membre d'une équation linéaire, on obtient l'équation de Bernoulli

$$y' + Xy = X_1 y^n. \tag{15}$$

Cette équation, divisée par y^n, se met sous la forme

$$\frac{y'}{y^n} + X\frac{1}{y^{n-1}} = X_1.$$

Prenons z pour inconnue en posant

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n};$$

l'équation se ramène à l'*équation linéaire*

$$z' - (n-1)Xz = -(n-1)X_1.$$

La valeur de z ou de $1 : y^{n-1}$ sera donc

$$\frac{1}{y^{n-1}} = e^{n-1\int X dx}\left[C - (n-1)\int X_1 dx\, e^{-n-1\int X dx}\right]. \tag{16}$$

Cette formule devient illusoire si $n = 1$, mais, dans ce cas, l'équation de Bernoulli se réduit à l'équation linéaire sans second membre $y' + (X - X_1)y = 0$.

Exemples. — Voici quelques équations de Bernoulli et leurs intégrales :

$(1-x^2)y' - xy = axy^2$	$y^{-1} = C\sqrt{1-x^2} - a$
$y' + 2xy = 2ax^3y^3$	$2y^{-2} = a(1+2x^2) - Ce^{2x^2}$
$y^{n-1}(ay' + y) = x$	$ny^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$
$y' + \frac{xy}{1-y^2} = x\sqrt{y}$	$3\sqrt{y} = C(1-x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)$
$xy^2(xy' + y) = a^2$	$2(xy)^3 = 3a^2x^2 + C.$

187. Equation de Riccati. — C'est l'équation du type général

$$y' + Xy^2 + X_1y + X_2 = 0.$$

où les lettres X désignent des fonctions de x seul. Cette équation peut s'intégrer quand on en connaît une solution particulière y_1.

Posons, en effet,

$$y = y_1 + z;$$

l'équation devient

$$z' + (y_1' + Xy_1^2 + X_1y_1 + X_2) + Xz^2 + 2Xy_1z + X_1z = 0$$

et, y_1 étant une intégrale particulière, elle se réduit à

$$z' + z(2Xy_1 + X_1) = -Xz^2.$$

C'est une *équation de Bernoulli*, qu'on ramène à une équation linéaire en posant $z = 1 : u$. On serait donc ramené directement à une *équation linéaire* en posant tout de suite

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Si l'on connaît trois intégrales particulières y_1, y_2, y_3 de l'équation de Riccati, l'intégrale générale s'obtient sans aucune quadrature.

En effet, on connaît alors deux intégrales particulières

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \qquad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1},$$

de l'équation en u. Donc l'intégrale de l'équation en u est (nº 185)

$$\frac{u - u_1}{u_1 - u_2} = \text{Const.}$$

Celle de l'équation de Riccati s'obtient par l'élimination des lettres u, ce sera

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{Const.}$$

Cette formule exprime que *le rapport anharmonique de quatre intégrales de l'équation de Ricccati est constant.*

Remarque. On peut supposer X différent de 0 dans l'équation précédente, sinon elle serait linéaire. Alors, par la substitution $y = z : \mathrm{X}$, elle se ramène à la forme

$$z' + z^2 + \left(\mathrm{X}_1 - \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}\right)z + \mathrm{XX}_2 = 0,$$

ou, plus simplement, P et Q étant fonctions de x seul,

(17) $$z' + z^2 + \mathrm{P}z + \mathrm{Q} = 0,$$

Par la substitution $z = u' : u$, celle-ci revient à l'équation du second ordre

(18) $$u'' + \mathrm{P}u' + \mathrm{Q}u = 0.$$

Cette nouvelle équation, que nous étudierons en détail dans le chapitre suivant, est une *équation linéaire sans second membre.*

Cas d'intégrabilité. — L'équation suivante

(19) $$y' + ay^2 = bx^m,$$

est un cas particulier de celle de Riccati, *elle s'intègre sous forme finie, chaque fois que* $2 : (m + 2)$ *est un nombre impair (positif ou négatif),*

— *ou, ce qui revient au même, chaque fois que* $m : (m+2)$ *est un nombre pair (positif ou négatif).*

En effet, par la substitution $y = \frac{u'}{au}$ elle devient

$$(20) \qquad u'' - ab\, u\, x^m = 0.$$

C'est la transformée obtenue par *Euler*. Nous prouverons, dans le chapitre suivant, que celle-ci s'intègre sous forme finie pour les valeurs ci-dessus de m.

188. Théorie du facteur intégrant ou multiplicateur. — Soit l'équation

$$(21) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0.$$

On appelle *multiplicateur* ou *facteur intégrant* un facteur μ, généralement fonction de x et de y, tel que l'expression

$$\mu\,(P\,dx + Q\,dy)$$

soit une différentielle totale exacte.

I. *Il existe toujours un facteur intégrant.*

En effet, l'équation (**21**) admet toujours une intégrale générale renfermant une constante arbitraire et qui, résolue par rapport à cette dernière, prend la forme

$$F(x, y) = C.$$

Connaissant cette intégrale générale, on peut en déduire un facteur intégrant μ. En effet, différentions totalement cette équation, puis éliminons dx et dy entre l'équation obtenue et l'équation (**21**) ; il vient successivement

$$F'_x dx + F'_y dy = 0, \qquad \frac{F'_x}{P} = \frac{F'_y}{Q}.$$

Cette dernière équation ne renferme plus C et doit être vérifiée en tout point x, y de l'intégrale générale, donc en un point quelconque, car on peut faire passer une intégrale particulière par ce point. C'est donc une *identité* : ses deux membres ne sont que deux expressions différentes d'une même fonction de x, y que nous désignerons maintenant par μ. Il vient donc *identiquement*

$$F'_x = \mu P, \quad F'_y = \mu Q, \quad \text{d'où} \quad \mu(P\,dx + Q\,dy) = dF(x, y).$$

Donc μ est un facteur intégrant et l'on connaît une expression $F'_x : P$ de ce facteur.

II. *Si* $F(x, y) = C$ *et* $F_1(x, y) = C_1$ *sont deux formes différentes de l'intégrale générale de l'équation* (**21**), *on a*

$$F_1 = \varphi(F).$$

En effet soient μ ef μ_1 les deux facteurs intégrants correspondants à F et à F_1. On a

$$\mu(Pdx + Qdy) = dF \qquad \mu_1(Pdx + Qdy) = dF_1$$

d'où

$$dF_1 = \frac{\mu_1}{\mu}\,dF.$$

Cette relation a lieu les variables x et y étant indépendantes. Elle subsiste si l'on change ces variables. Comme F contient au moins une des deux lettres x ou y, supposons que F contienne y. Prenons alors x et F comme variables indépendantes ; cette relation montre que l'on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial F} = \frac{\mu_1}{\mu}.$$

Donc F_1 ne dépend que de F et l'on a

$$F_1 = \varphi(F), \qquad \frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(F).$$

III. *Il existe une infinité de facteurs intégrants, et si* μ *est l'un d'eux, ils sont tous compris dans la formule générale* $\mu\psi(F)$, *la fonction* ψ *restant arbitraire.*

Tout facteur intégrant μ_1 est de cette forme, car, si $\mu_1(Pdx + Qdy) = dF_1$, μ_1 vérifie la dernière équation ci-dessus. Réciproquement, tout facteur de cette forme est intégrant, car on a

$$\mu\psi(F)(Pdx + Qdy) = \psi(F)dF = d.\int\psi(F)dF,$$

ce qui est une différentielle exacte.

IV. *La connaissance d'un facteur intégrant permet d'obtenir l'intégrale générale par des quadratures et de déterminer immédiatement la solution singulière s'il y en a une.*

En effet, l'équation différentielle peut s'écrire

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{\mu}\,dF = 0.$$

Elle se décompose en deux autres : $dF = 0$, ce qui fournit la solu-

tion générale, et $1 : \mu = 0$, ce qui fournira la solution singulière. La solution singulière jouit donc de la propriété remarquable de rendre infini le facteur intégrant.

V. *Si l'on connaît deux facteurs intégrants dont le rapport ne se réduise pas identiquement à une constante, on obtiendra l'intégrale générale en égalant ce rapport à une constante arbitraire.*

En effet, soient μ et $\mu\psi(F)$ deux de ces facteurs, en égalant leur rapport à une constante, il vient $\psi(F) = C$. Mais ψ contient F par hypothèse, donc cette relation revient à $F = C$: c'est donc l'intégrale générale.

VI. *En particulier, si l'on connaît un facteur intégrant autre qu'une constante d'une équation différentielle exacte, on obtiendra l'intégrale en égalant ce facteur à une constante.*

189. Recherche d'un facteur intégrant. Cas de l'équation linéaire. — Parmi les équations étudiées précédemment, il y en a que nous avons intégrées par le procédé du facteur intégrant. Ce sont d'abord celles qui s'intègrent par séparation des variables (n° 181), car cette séparation se fait en multipliant l'équation par un facteur intégrant facile à apercevoir. Ce sont ensuite les équations homogènes, que l'on rend immédiatement intégrables en les divisant par $Px + Qy$, ce qui est donc l'inverse d'un facteur intégrant.

En dehors de ces deux cas, la recherche d'un facteur intégrant est un procédé peu pratique d'intégration et c'est plutôt l'intégration de l'équation qui conduit à la connaissance d'un facteur intégrant par la méthode indiquée au n° précédent.

Cherchons les conditions analytiques auxquelles doit satisfaire un facteur intégrant. Pour simplifier, mettons l'équation sous la forme

$$dy + Pdx = 0. \tag{22}$$

La condition pour que $\mu\,(dy + Pdx)$ soit une différentielle exacte, est

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \tag{23}$$

C'est une équation aux dérivées partielles et l'intégration de cette équation doit être considérée comme un problème d'ordre plus élevé que celle de l'équation (22).

Comme application, cherchons à quelle condition le facteur μ sera fonction de x seul. L'équation (25) se réduit dans cette hypothèse à

(24) $$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Il faut donc que P'_y soit fonction de x seul, c'est-à-dire que P soit une fonction linéaire de y. Les seules équations de la forme $dy + Pdx = 0$ dont le facteur intégrant soit fonction de x seul, sont donc les équations linéaires. Pour celles-là, P est de la forme $Xy - X_1$ et P'_y est égal à X.

Soit donc l'équation linéaire

(25) $$dy + yX\,dx = X_1\,dx;$$

son facteur intégrant est donné par l'équation (24), qui devient

(26) $$\frac{\mu'}{\mu} = X, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = e^{\int X dx}.$$

Multiplions donc l'équation (25) par un facteur intégrant μ et observons que $\mu dy = d(\mu y) - y d\mu$; il vient

$$d(\mu y) - y(\mu' - \mu X)dx = \mu X_1 dx.$$

Le terme en y disparaît par l'équation (26) ; il vient donc immédiatement

(27) $$y = \frac{1}{\mu}\int \mu X_1 dx.$$

C'est la formule d'intégration de l'équation linéaire (n° 185). Le facteur μ est l'inverse d'une solution de l'équation sans second membre.

Exercices.

1. En prenant $y - X_1 : X$ pour inconnue, montrer que l'intégrale de l'équation linéaire (n° 185) peut s'écrire

$$y = \frac{X_1}{X} - e^{-\int X dx}\left[C + \int e^{\int X dx} d\frac{X_1}{X}\right].$$

2. Montrer que l'on peut intégrer l'équation

$$P(xdy - ydx) = Qdy - Rdx.$$

où P, Q, R sont homogènes en x, y et Q, R du même degré.

R. On pose $y = ux$ et l'on obtient une équation de Bernoulli pour déterminer x en fonction de u.

3. Intégrer l'équation de l'exercice précédent en supposant que P, Q, R soient linéaires en x, y mais non plus nécessairement homogènes (Équation de *Jacobi*).

R. Si P, Q, R sont homogènes, c'est une application de l'exercice précédent. Si cette condition n'a pas lieu, on la réalise par le changement de variables

$$x = \xi + \alpha, \qquad y = \eta + \beta,$$

en déterminant les constantes α, β par les conditions

$$\frac{P(\alpha, \beta)}{1} = \frac{Q(\alpha, \beta)}{\alpha} = \frac{R(\alpha, \beta)}{\beta}.$$

En égalant chaque rapport à une même inconnue λ, en en tire trois équations linéaires entre α et β et l'élimination de α, β, fournit une équation du 3me degré pour déterminer λ.

4. La condition nécessaire et suffisante pour que $1 : (Px + Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx + Qdy = 0$ est que $P : Q$ soit homogène de degré 0.

5. La condition nécessaire et suffisante pour que $1 : (Px - Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx + Qdy = 0$ est que $Px^2 : Q$ soit fonction du produit xy.

6. La condition nécessaire et suffisante pour que $Pdx + Qdy$ admette un multiplicateur homogène de degré n est que la fonction

$$\frac{x^2(P'_y - Q'_x) - nQx}{Px + Qy}$$

soit homogène et de degré 0.

§ 4. Équations du 1er ordre non résolues par rapport à y'.

190. Définition de l'intégrale générale. — Soit une équation

(1) $$f(x, y, y') = 0.$$

On pourra généralement tirer de cette équation plusieurs valeurs pour y', peut-être même une infinité,

(2) $$y' = f_1(x, y), \qquad y' = f_2(x, y), \ldots$$

Ces équations, qui sont de la forme traitée dans le paragraphe précédent, auront chacune leur intégrale générale, soit respectivement

(3) $$F_1(x, y, C) = 0, \qquad F_2(x, y, C) = 0, \ldots$$

Ce sont autant de solutions de l'équation (1) et l'on appelle *inté-*

grale générale de cette équation une solution qui comprend toutes les précédentes.

Lorsqu'il n'y a qu'un nombre limité n d'équations (**2**) et, par suite, d'équations (**3**), on peut obtenir cette intégrale générale en multipliant entre elles toutes les relations (**3**), ce qui donne

$$(4) \qquad F_1(x, y, C)\,F_2(x, y, C) \dots F_n(x, y, C) = 0.$$

Il arrive souvent que toutes les équations (**3**) peuvent être comprises en une seule renfermant des fonctions à déterminations multiples. Cette relation unique est alors l'intégrale générale. Si les fonctions à déterminations multiples sont des radicaux, on pourra généralement les faire disparaître par des élévations de puissance, mais il est clair que cela revient à former l'équation (**4**). Il est à remarquer que cette opération a déjà été faite pour plusieurs des équations proposées au paragraphe précédent. En voici un nouvel exemple : soit

$$y'^2 = 1 + y^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{\pm\sqrt{1+y^2}} = dx.$$

On en tire l'intégrale générale sous les deux formes

$$\text{Log}\left(\frac{y \pm \sqrt{1+y^2}}{C}\right) = \text{Log}\, e^x, \qquad 1 + y^2 = (Ce^x - y)^2.$$

Exemples. Les trois équations :

$$y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\,y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\,y' - x^3y^3 = 0$$

$$(a^2 - x^2)\,y'^3 + bx\,(a^2 - x^2)\,y'^2 - y' - bx = 0$$

$$\left[1 - \frac{y^2}{x^2}(x^2 + y^2)^2\right] y'^2 - \frac{2y}{x}\,y' + \frac{y}{x^2} = 0$$

reviennent aux suivantes, dont nous mettons l'intégrale en regard :

$(y' - x^2)(y' - xy)(y' - y^2) = 0$	$\left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{c - x}\right) = 0$
$[(a^2 - x^2)\,y'^2 - 1](y' + bx) = 0$	$(y + C)^3 = \frac{bx^2}{2}\left(\text{arc sin}\,\frac{x}{a}\right)^2$
$(xy' - y)^2 = [yy'(x^2 + y^2)]^2$	$y = x\,\text{tg}\left(C \pm \frac{y^2}{2}\right)$

191. Equations où manque une variable. — Elles sont de l'une des deux formes suivantes (la seconde se ramènerait d'ailleurs à la première en prenant x pour inconnue) :

$$f(x, y') = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(y, y') = 0.$$

On ramène immédiatement l'intégration à une quadrature en résolvant l'équation par rapport à y'. Mais il arrive que l'équation soit plus facile à résoudre par rapport à x (ou à y) que par rapport à y'. Dans ce cas, en faisant la résolution et en remplaçant y' par p, on obtient

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y - C = \int p\,dx = \int p\varphi'(p)\,dp \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = \varphi(p) \\ x - C = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p} \end{cases}$$

C'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale : x et y sont exprimés en fonction de p. En éliminant p entre les deux relations, on met l'intégrale sous la forme habituelle.

Exemples. I. Soit l'équation $x = p^3 + 1$;

$$y = \int p\,dx = 3\int p^3 dp = \frac{3}{4}\, p^4 + C.$$

En éliminant p, il vient $(x-1)^4 = \left[\frac{4}{3}\,(y - C)\right]^3$.

II. Soit l'équation $x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$;

$$y - C = \int p\,dx = px - \int x\,dp = px - a\int \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = px - a\sqrt{1+p^2}.$$

En éliminant p, il vient $x^2 + (y - C)^2 = a^2$.

192. Équations homogènes. — Désignons encore y' par p et soit $f(x, y, p) = 0$ une équation homogène par rapport aux deux variables x, y. En divisant par une puissance convenable de x et en posant $y = ux$, l'équation prend la forme $F(u, p) = 0$. Si on peut la résoudre par rapport à p, elle se ramène à la forme étudiée au nº 182. Laissons ce cas de côté. Si on peut la résoudre par rapport à u, on aura

$$u = \varphi(p).$$

Cherchons la relation entre x et p. En dérivant $y = ux$ on obtient

$$dy = p\,dx = u\,dx + x\,du,$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p - \varphi(p)}.$$

L'équation différentielle entre x et p est à variables séparées et donne x en fonction de p par une quadrature. On obtient ensuite y

en fonction de p par la relation $y = ux = x\varphi(p)$. On a donc une représentation paramétrique de l'intégrale.

Exemples. Voici trois équations avec, en regard, soit x exprimé en fonction de p, soit l'intégrale générale :

$y - px = nx\sqrt{1+p^2}$	$x = \dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}\left[\sqrt{1+p^2} - p\right]^{\frac{1}{n}}$
$y\sqrt{1+p^2} = n(x+py)$	$(x-C)^2 + y^2 = (nC)^2$
$y = yp^2 + 2px$	$y^2 = 2Cx + C^2$

193. Equations qui s'intègrent par dérivation. — Soit une équation résolue par rapport à y

$$(5) \qquad y = f(x, y').$$

En y remplaçant y' par p, elle devient

$$(6) \qquad y = f(x, p)$$

Cette équation peut aussi être considérée comme celle de l'intégrale, à condition d'y remplacer p par une fonction de x telle que $y' = p$. Si l'on dérive cette équation, on voit que, pour cela, p doit vérifier la condition nécessaire et suffisante :

$$(7) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

C'est une équation du premier ordre entre p et x. Si on sait l'intégrer, on en tirera

$$(8) \qquad F(x, p, C) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = \varphi(x, C).$$

Portons cette valeur de p dans l'équation (6), nous trouvons l'intégrale

$$y = f(x, \varphi).$$

L'intégrale générale de (5) s'obtient donc en éliminant p entre (6) et (8) et, si l'on a soin de tenir compte de toutes les solutions de l'équation (8), on ne laissera échapper par cette méthode aucune intégrale de l'équation (5). On pourrait aussi résoudre l'équation (8) par rapport à x, puis porter la valeur trouvée dans (6) ; on aurait exprimé ainsi x et y en fonction de p et obtenu, par conséquent, une représentation paramétrique de l'intégrale.

Les équations traitées dans les deux nos suivants fournissent des exemples de cette méthode.

194. Équation linéaire en x et y. — Elle est de la forme (p désignant y')

$$(9) \qquad y = x\varphi(p) + \psi(p).$$

En la dérivant, on en tire

$$(10) \qquad p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}.$$

On peut vérifier cette équation en annulant $p - \varphi(p)$ et $\frac{dp}{dx}$; nous y reviendrons dans un instant. Supposons d'abord qu'aucune de ces quantités ne soit nulle ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\, x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

Cette équation est linéaire en considérant x comme l'inconnue et p comme la variable indépendante. On sait l'intégrer et l'on trouve x en fonction de p et d'une constante arbitraire. En éliminant p entre cette relation et l'équation (9), on obtient l'intégrale générale. Si, au lieu de cela, on porte la valeur de x dans (9), x et y sont exprimés en fonction de p et l'on a une représentation paramétrique de l'intégrale.

Annulons maintenant $p - \varphi(p)$. On en tire généralement un certain nombre de valeurs constantes p_1, p_2,... qui satisfont à l'équation (10), car $\frac{dp}{dx}$ est alors nul aussi. En portant ces valeurs de p dans l'équation (9), on en tire un certain nombre de solutions singulières qui, géométriquement, représentent des droites.

Exemples. Les équations homogènes traitées au n° 192 peuvent aussi se résoudre par cette méthode. Voici d'autres exemples où les équations ne sont pas homogènes. Nous mettons l'équation à intégrer dans la première colonne, la valeur de x en fonction de p en regard.

$y = x(1 + p) + p^2$	$x = Ce^{-p} - 2(p - 1)$
$y = 2px + \sqrt{1 + p^2}$	$p^2 x = C - \int \frac{p^2 dp}{\sqrt{1 + p^2}}$
$y = 2px - p^2$	$3p^2 x = C + 2p^3$

195. Équation de Clairaut. — La méthode du n° précédent échoue si $\varphi(p)$ se réduit à p. Dans ce cas, on obtient l'*équation de Clairaut*, qui a donc pour type

$$(11) \qquad y = px + \psi(p).$$

En la dérivant, il vient

$$y' = p + \left[x + \psi'(p)\right] \frac{dp}{dx} = 0,$$

et, pour qu'on ait $y' = p$, il faut et il suffit que $\frac{dp}{dx}\left[x + \psi'(p)\right] = 0.$

Cette équation peut être satisfaite de deux manières :

1° En posant $\frac{dp}{dx} = 0$ d'où $p = C$.

Portant cette valeur dans (**11**), on obtient l'intégrale générale

$$y = Cx + \psi(C),$$

qui représente géométriquement un système de droites.

2° En posant $x + \psi'(p) = 0$.

Si on élimine p entre cette équation et (**11**), on obtient une solution sans constante arbitraire. C'est une intégrale singulière, car elle ne peut rentrer dans l'intégrale générale (p étant maintenant fonction de x). La solution singulière représente donc une courbe.

L'intégrale générale se compose de toutes les tangentes à la courbe représentée par la solution singulière.

En effet, toute solution particulière est donnée par l'équation $y = px + \psi(p)$ où p est constant. Cette droite passe par le point de la courbe qui a pour abscisse $x = -\psi'(p)$. Comme le coefficient angulaire y' de la courbe en ce point est égal à p par notre calcul lui-même, la droite touche donc la courbe en ce point.

Réciproquement, l'équation différentielle des tangentes à une courbe revient à une équation de Clairaut.

En effet, l'équation d'une droite étant $y = px + q$, pour exprimer qu'elle touche la courbe $\beta = f(\alpha)$, on écrira

$$f(\alpha) = p\alpha + q, \qquad p = f'(\alpha).$$

En éliminant α entre ces deux relations, on obtient une relation de la forme $q = \psi(p)$. L'équation générale des tangentes est donc

$$y = px + \psi(p)$$

et elle dépend d'une constante arbitraire p. Pour former l'équation différentielle des tangentes, il faut éliminer p entre cette équation et sa dérivée $y' = p$; on forme donc une équation de Clairaut.

Exemples. Voici quelques équations de Clairaut avec leurs intégrales singulières en regard :

$y = px + p - p^2,$	$4y = (x+1)^2\,;$
$y = px + \sqrt{a^2 - b^2p^2},$	$by\sqrt{x^2+b^2} = a(x^2 - b^2)\,;$
$y = px + \sqrt{1+p^2}$	$x^2 + y^2 = 1$

Exercices.

1. Intégrer les équations

$$ayy'^2 + (2x - b)\,y' - y = 0$$

$$(4x^2 - a^2)\,y'^2 - 4xyy' + y^2 - a^2 = 0$$

$$(y - x)\sqrt{1 + x^3}\,dy = n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

R. La première se ramène à une équation de Clairaut par la substitution $y^2 = u$ et la seconde à une équation linéaire en x, y en la résolvant par rapport à y.

Pour intégrer la troisième, on pose $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$, ce qui ramène à l'équation $\sin(v - u)\,du = n\,dv$ et les variables se séparent en posant $v - u = z$.

2. L'équation de Clairaut est la seule qui s'intègre en remplaçant y' par C (Mansion).

3. *Transformation de Legendre.* Elle consiste à prendre comme nouvelles variables

$$X = y', \qquad Y = xy' - y.$$

En différentiant ces relations, on en tire, sans difficulté,

$$x = \frac{dY}{dX} \qquad y = X\frac{dY}{dX} - Y, \qquad y' = X.$$

Par cette substitution, on ramène l'une à l'autre les deux équations

$$f(x, y, y') = 0 \qquad\qquad f\left(\frac{dY}{dx}, X\frac{dY}{dx} - Y, X\right) = 0$$

et l'intégrale de l'une fait connaître celle de l'autre.

Par exemple, l'équation $\Phi(xy' - y) = x\varphi(y')$ devient $\Phi(Y) = \dfrac{dY}{dX}\varphi(X)$ et les variables se séparent.

Cette substitution suppose toutefois que y'' ne soit pas nul. Si on l'applique à une équation de Clairaut, on ne trouve que la solution singulière.

§ 5. Applications géométriques des équations du 1er ordre.

196. Problème des trajectoires. — *Soit* $F(x, y, \alpha) = 0$ *une équation*

renfermant un paramètre arbitraire α, *et qui représente, en axes rectangulaires, une famille de courbes planes* (F) ; *on demande de trouver les courbes qui rencontrent, sous un même angle donné* ω, *toutes les courbes de cette famille.*

Soit (x, y) un point du plan. Considérons une courbe de la famille (F) et une trajectoire passant par ce point. Soient, en ce point, φ l'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à la courbe et $\varphi' = \varphi + \omega$ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire. On aura

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi' - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\omega}.$$

Ceci posé, formons l'équation différentielle des courbes de la famille (F), ce qui se fait en éliminant α entre $F = 0$ et sa dérivée. Cette équation sera de la forme

$$(2) \qquad f(x, y, y') = 0.$$

Dans cette équation, y' représente $\operatorname{tg}\varphi$. Si nous voulons en déduire l'équation différentielle des trajectoires, il faut former une équation dans laquelle y' représente $\operatorname{tg}\varphi'$. En vertu de la relation (1) entre $\operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{tg}\varphi'$, il faut, pour cela, remplacer, dans l'équation (2), y' par l'expression

$$(3) \qquad \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}.$$

D'où la règle : *L'équation différentielle des trajectoires s'obtient en formant l'équation différentielle des courbes* (F) *et en y remplaçant* y' *par* $(y' - tg\,\omega) : (1 + y' \operatorname{tg}\omega)$.

Les trajectoires sont *orthogonales* ou *obliques* selon que l'angle ω est droit ou ne l'est pas. Dans le cas des trajectoires orthogonales, $\operatorname{tg}\omega$ est infini, l'expression (3) se réduit à $-1 : y'$. Donc *l'équation des trajectoires orthogonales s'obtient en remplaçant* y' *par* $-1 : y'$ *dans l'équation différentielle des courbes* (F).

Si l'angle ω est nul, la courbe cherchée touche toutes les courbes de la famille (F). On peut considérer le problème de trouver cette courbe comme un cas-limite de celui des trajectoires. L'expression (3) se réduit à y' et l'équation des trajectoires coïncide avec l'équation différentielle des courbes (F). La solution du problème ne peut donc être donnée que par une intégrale singulière de l'équation (2).

197. Exemples de trajectoires obliques. — Cherchons les trajectoires des droites

$$y = \alpha x.$$

L'équation différentielle de ces droites est $xy' = y$. Donc celle des trajectoires sera, d'après la règle,

$$x(y' - \operatorname{tg} \omega) = y(1 + y' \operatorname{tg} \omega),$$

d'où

$$x\,dy - y\,dx = \operatorname{tg} \omega\,(x\,dx + y\,dy).$$

Cette équation homogène s'intègre immédiatement en la divisant par $x^2 + y^2$; il vient

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega \left[\frac{1}{2} \operatorname{Log}(x^2 + y^2) - \operatorname{Log} C\right]$$

ou, plus simplement, en coordonnées polaires r et θ,

$$r = Ce^{\theta \cot \omega}.$$

Les trajectoires sont donc des *spirales logarithmiques.*

Remarque. — Si l'on considère un cône circulaire droit ayant le plan xy pour base, les trajectoires précédentes sont les projections sur ce plan d'une courbe du cône, qui coupe toutes les génératrices sous le même angle et qu'on appelle *hélice cylindroconique*. On voit donc que les projections d'une hélice cylindroconique sur le plan de base sont des spirales logarithmiques.

198. Exemples de trajectoires orthogonales. Systèmes orthogonaux. — Une famille de courbes et ses trajectoires orthogonales forment ce qu'on appelle un *système orthogonal*. Nous allons en faire connaître quelques exemples simples :

I. Considérons les courbes paraboliques

$$y = \alpha x^a.$$

Leur équation différentielle est $xy' = ay$. Donc celle des trajectoires orthogonales sera

$$ayy' + x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad ay^2 + x^2 = C.$$

Les trajectoires sont des coniques ayant l'origine pour centre. En particulier, si $a = -1$, on a le *système orthogonal* :

$$xy = \alpha, \qquad x^2 - y^2 = C,$$

composé de deux familles d'hyperboles équilatères : les axes coor-

donnés sont les asymptotes des courbes de la première famille et les axes de symétrie des courbes de la seconde.

II. Considérons les *coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a + C} + \frac{y^2}{b + C} = 1.$$

Leur équation différentielle est (n° 169)

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 + a - b}{xy} y' - 1 = 0.$$

Cette équation se reproduit par le changement de y' en $-1 : y'$. Donc le système des coniques homofocales contient ses propres trajectoires et forme à lui seul un système orthogonal. Par chaque point du plan passent effectivement deux courbes de la famille, une ellipse et une hyperbole, qui se coupent à angle droit.

199. Lignes de niveau et de plus grande pente d'une surface. — Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface rapportée à des axes rectangulaires. Nous supposerons l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan xy horizontal.

Les *lignes de niveau* de la surface sont les intersections de la surface par des plans horizontaux.

Les *lignes de plus grande pente* sont celles dont la tangente fait, en chaque point, le plus grand angle possible avec le plan horizontal. Cette tangente est donc perpendiculaire à la tangente horizontale (qui est celle de la ligne de niveau). Les lignes de plus grande pente sont donc les trajectoires orthogonales des lignes de niveau sur la surface.

Nous allons former les équations différentielles des projections de ces deux sortes de lignes sur le plan xy.

On obtient une ligne de niveau en coupant la surface par le plan $z = \alpha$. La projection de cette ligne sur le plan xy a pour équation

$$F(x, y, \alpha) = 0.$$

Pour former l'équation différentielle de ces projections, il faut dériver cette équation et éliminer α.

Passons aux lignes de plus grande pente. Ce sont les trajectoires orthogonales des lignes de niveau sur la surface. Mais l'orthogonalité subsiste en projection sur le plan horizontal, parce que les lignes de niveau sont horizontales. Donc les projections des lignes de plus

grande pente sur le plan xy sont les trajectoires orthogonaxes des projections des lignes de niveau ; leur équation différentielle s'obtient en remplaçant y' par $-1 : y'$ dans l'équation différentielle des projections des lignes de niveau.

Appliquons cette théorie aux surfaces à centre du second degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H.$$

En remplaçant z par α et en dérivant, on forme l'équation différentielle des projections des lignes de niveau

$$Ax + Byy' = 0.$$

Celle des projections des lignes de plus grande pente sera

$$Axy' - By = 0.$$

C'est une équation à variables séparées, ayant pour intégrale

$$y^{A} = \alpha x^{B}.$$

Si l'on suppose $A = B$, la surface est de révolution, les projections des lignes de plus grande pente sont des droites et ces lignes elles-mêmes sont les méridiennes de la surface.

Exercices.

1. Les distances de l'origine aux points où la tangente coupe l'axe des y et où la normale coupe l'axe des x, sont dans un rapport constant a. Trouver la courbe.

R. L'équation différentielle est $y\,dx - x\,dy = a\,(x\,dx + y\,dy)$. La courbe est une spirale logarithmique.

2. L'ordonnée à l'origine de la tangente est $kx^m y^n$. Trouver la courbe.

R. On obtient une équation de Bernoulli.

3. La projection sur le rayon vecteur de la normale terminée à l'axe des x, est une constante a. Trouver la courbe.

R. C'est une section conique $r = a : (1 - C\cos\theta)$.

4. Trajectoires orthogonales des paraboles $y^2 = 2p\,(x - \alpha)$.

R. Leur équation est $\operatorname{Log} y = -\dfrac{x}{p} + C$.

5. Trajectoires orthogonales des cissoïdes $y^2\,(2\alpha - x) = x^3$.

R. En coordonnées polaires, $r^2 = C\,(1 + \cos^2\theta)$.

6. Trajectoires orthogonales des cercles $x^2 + y^2 = \alpha x$.

R. Leur équation est $x^2 + y^2 = Cy$.

7. Trajectoires orthogonales des courbes $r^2 = a^2 \operatorname{Log} (\operatorname{tg} \theta : \alpha)$.

R. On trouve $2r^2 (\sin^2\theta + C) = a^2$.

8. Le produit des segments compris sur deux axes rectangulaires entre l'origine et la tangente, est une constante k^2. Trouver la courbe.

R. Equation différentielle de Clairaut $y = px \pm k\sqrt{-p}$. Solution singulière $4xy = k$. C'est la courbe cherchée.

9. Courbes dont la tangente est à une distance constante a de l'origine.

R. Equation différentielle de Clairaut $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^2 + y^2 = a^2$.

10. La portion de tangente entre deux axes rectangulaires est une constante a. Trouver la courbe.

R. Equation de Clairaut $y = px + ap : \sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

11. Trouver une courbe telle que l'aire S comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques, soit proportionnelle à l'arc s compris entre les mêmes ordonnées.

R. La courbe est une chaînette ayant pour base l'axe des x.

12. Trouver la développante (trajectoire orthogonale des tangentes) de la chaînette $y = (e^{mx} + e^{-mx}) : 2m$ en prenant comme origine de cette développante sur la courbe le point le plus bas. — Cette développante s'appelle *tractrice* ; la tractrice est aussi : 1° la courbe dont la tangente est constante ; 2° la trajectoire orthogonale d'une famille de cercles de même rayon, dont les centres sont en ligne droite.

13. Trouver la route suivie par un rayon lumineux qui traverse un milieu dans lequel l'indice de réfraction varie proportionnellement à la profondeur.

CHAPITRE VI.

Equations différentielles ordinaires (suite). Equations d'ordre supérieur au 1er. Systèmes d'équations.

---

§ 1. Equations linéaires sans second membre. Wronskiens.

200. Notations. — Premières propriétés des équations linéaires sans second membre. — On appelle *équation linéaire homogène* ou *linéaire sans second membre* une équation linéaire et homogène par rapport à y et à ses dérivées successives.

Nous supposerons que le coefficient de la plus haute dérivée ne s'annule pas. Comme on peut alors diviser toute l'équation par ce coefficient, on peut admettre *a priori* qu'il soit égal à l'unité. L'équation d'ordre n prend alors la forme suivante

$$(1) \qquad y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_{n-1} y' + X_n y = 0.$$

où les lettres P désignent des fonctions de x seul, *supposées continues*, et les exposants des indices de dérivation.

Cette équation satisfait aux conditions de continuité qui assurent l'existence et l'unicité de l'intégrale générale (no 178). De là la propriété suivante :

I. *Dans tout intervalle de continuité de ses coefficients, l'équation linéaire sans second membre admet une intégrale générale et ne peut avoir de solution singulière.*

Le premier membre de l'équation (1) est un polynome symbolique de degré n en y. Nous poserons, en abrégé,

$$(2) \qquad f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y,$$

de sorte que l'équation (1) s'écrira

$$(3) \qquad f(y) = 0.$$

Si l'on désigne par u_1, u_2... des fonctions de x, par C_1, C_2,... des constantes, on reconnaît immédiatement, par les règles de dérivation,

que le polynome symbolique $f(y)$ jouit de la propriété exprimée par l'équation

$$(4)\qquad f(C_1u_1 + C_2u_2 + \cdots) = C_1f(u_1) + C_2f(u_2) + \cdots$$

On en conclut le théorème suivant, qui conduit, comme nous le verrons (nos 202, 203, 204), à l'intégration de l'équation :

II. *Si u_1, u_2,... sont des intégrales particulières, en nombre quelconque, de l'équation linéaire sans second membre, la fonction $y = C_1u_1 + C_2u_2 + \cdots$ sera une nouvelle intégrale plus générale.*

Il est naturel de se demander si l'on ne pourrait pas, par une transformation, simplifier l'équation linéaire en annulant certains de ses coefficients. A ce point de vue, on peut énoncer le théorème suivant :

III. *On peut, par une quadrature, faire disparaître le terme en y^{n-1} de l'équation d'ordre n.*

Désignons, en effet, par u une fonction auxiliaire à déterminer et par z une nouvelle inconnue. Transformons l'équation (1) par la substitution $y = uz$, d'où l'on tire, par la règle de dérivation d'un produit.

$$y^n = uz^n + nu'z^{n-1} + \cdots, \qquad y^{n-1} = uz^{n-1} + \cdots, \qquad \cdots\cdots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (1), le coefficient de z^n sera u, celui de z^{n-1} sera $(nu' + uX_1)$. Donc, si l'on détermine u par l'équation

$$nu' + uX_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad u = e^{-\frac{1}{n}\int X_1 dx}$$

et qu'on divise l'équation (1) par u, l'équation transformée en z sera de la forme

$$z^n + Z_2z^{n-2} + \cdots + Z_n = 0,$$

les lettres Z désignant des fonctions de x.

Cette transformation, qui exige la détermination de u, dépend donc d'une quadrature.

201. Définition et propriétés des wronskiens. — L'étude des équations linéaires est intimement liée à celle de certains déterminants nommés *wronskiens*. Soient u_1, u_2,... u_n des fonctions de x ; le ***wronskien de** u_1, u_2,... u_n* est, par définition, le déterminant suivant, formé avec les fonctions u et leurs dérivées :

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \ldots u_n \\ u_1', & u_2', & \ldots u_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \ldots u_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nous le désignerons par W ou par W $(u_1, u_2, \ldots u_n)$,

Ceci suppose évidemment que u_1, $u_2, \ldots u_n$ admettent des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, mais cette condition a lieu par hypothèse, si u_1, $u_2, \ldots$ sont des intégrales de l'équation (1).

Les wronskiens jouissent de certaines propriétés très simples :

1°) Le wronskien W s'annule si deux des fonctions u sont égales.

2°) Pour dériver un wronskien, on doit remplacer les éléments de la dernière ligne par leurs dérivées.

Cette règle est un cas particulier de la règle générale suivante : La dérivée d'un déterminant est la somme des déterminants successivement obtenus en remplaçant dans le proposé : d'abord tous les élements de la première ligne, puis tous ceux de la seconde,... enfin tous ceux de la dernière ligne par leur dérivées [1].

En effet, si l'on applique cette règle à un wronskien, tous les déterminants ainsi obtenus sont nuls comme ayant deux lignes égales, sauf le dernier.

202. Théorème I. — *Etant donnée une équation $f(y) = 0$, linéaire et sans second membre d'ordre n : 1° elle admet toujours n solutions particulières u_1, $u_2, \ldots u_n$ dont le wronskien ne s'annule pas ; 2° si u_1, $u_2, \ldots u_n$ sont n solutions satisfaisant à cette condition, l'intégrale générale sera*

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n . \tag{5}$$

Il n'y a d'ailleurs pas d'autre solution (n° 200).

Démontrons d'abord le premier point. Si u_1 est une solution particulière différente 0 de l'équation, son wronskien se réduit à u_1 et n'est pas nul. Supposons, par impossible, qu'on puisse trouver p $(0 < p < n)$ solutions particulières u_1, $u_2, \ldots u_p$ dont le wronskien soit différent de 0, mais qu'il soit impossible de leur ajouter une nouvelle solution satisfaisant à la même condition. Dans ce cas, toute intégrale de l'équation $f(y) = 0$ et, par conséquent, son intégrale générale vérifient la relation

[1] Cette règle se démontre aisément. S'il n'y a de variables que les éléments d'une seule ligne, on reconnait immédiatement, en développant le déterminant par rapport aux éléments de cette ligne, que sa dérivée s'obtient en remplaçant chaque terme de cette ligne par sa dérivée. La dérivée d'un déterminant quelconque sera donc, par la règle de dérivation des fonctions composées, la somme des déterminants successivement obtenus en supposant variables les éléments de la première ligne, puis ceux de la seconde,... ce qui conduit à la règle énoncée.

$$W(u_1, u_2, \ldots u_p, y) = 0.$$

Cette relation est linéaire par rapport aux quantités $y, y', \ldots, y^p$, auxquelles on peut attribuer un système de valeurs arbitraires pour chaque valeur de x, car p est $< n$ et l'intégrale générale comprend au moins une intégrale particulière à laquelle on peut imposer ce systèmes de valeurs comme *initiales*. Donc la relation ne peut subsister que si les coefficients de $y, y', \ldots$ sont nuls séparément, ce qui n'a pas lieu, car le coefficient de y^p est $W(u_1, u_2, \ldots u_p)$ qui est supposé différent de 0. Donc l'hypothèse est impossible, ce qui démontre la première partie du théorème.

Pour établir la seconde partie, considérons l'intégrale

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n \qquad (\text{ou} \qquad y = \Sigma C u)$$

formée avec n intégrales particulières dont le wronskien W ne soit pas nul.

Pour établir que c'est l'intégrale générale, il faut prouver que les n constantes sont distinctes, ou permettent d'attribuer à $y, y', \ldots y^{n-1}$ des valeurs arbitraires pour une valeur particulière de x. Il suffit, pour cela, que le système d'équations

$$y = \Sigma C u, \qquad y' = \Sigma C u', \qquad \ldots \qquad y^{n-1} = \Sigma C u^{n-1}$$

soit résoluble par rapport aux constantes C. Cette condition est effectivement remplie, car le déterminant du système est le wronskien **W** qui n'est pas nul.

203. Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $W(u_1, u_2, \ldots u_n)$ *soit nul est que les n fonctions u, supposées dérivables, ne soient pas linéairement indépendantes.*

On dit que les fonctions u sont linéairement indépendantes si l'identité

$$(6) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_n u_n = 0 \qquad (\text{ou} \quad \Sigma \alpha u = 0)$$

ne peut avoir lieu pour des valeurs constantes des coefficients α que si tous ces coefficients sont nuls.

Si les fonctions u ne sont pas linéairement indépendantes, on forme par des dérivations successives le système de n équations

$$\Sigma \alpha u = 0, \qquad \Sigma \alpha u' = 0, \ldots \qquad \Sigma \alpha u^{n-1} = 0$$

et, ces relations étant satisfaites pour des valeurs non toutes nulles des α, on en tire $W(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'on ait identiquement

$$W(u_1, u_2, \dots u_n) = 0.$$

Je dis que les fonctions u ne sont pas linéairement indépendantes.

En effet, si u_1 était identiquement nul, on aurait $u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots = 0$ et les fonctions u ne seraient pas linéairement indépendantes. Supposons donc u_1 différent de 0 et joignons-lui successivement de nouvelles fonctions $u_2, u_3, \dots$ jusqu'à ce que nous arrivions à un premier wronskien $W(u_1, u_2, \dots u_p)$ qui s'annule $(p \leqslant n)$; u_p sera une intégrale de l'équation linéaire d'ordre $p - 1$

$$(7) \qquad W(u_1, u_2, \dots u_{p-1}, y) = 0.$$

Le coefficient de y^{p-1} est $W(u_1, u_2, \dots u_{p-1})$, qui n'est pas nul, et l'équation (**7**) admet les solutions particulières $u_1, u_2, \dots u_{p-1}$, satisfaisant aux conditions du théorème précédent ; on en conclut que son intégrale générale sera $y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_{p-1} u_{p-1}$ et il n'y a pas d'autre solution (n° 200). Donc l'intégrale particulière u_p est comprise dans la précédente en attribuant aux constantes C des valeurs convenables $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, ce qui donne

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{p-1} u_{p-1}.$$

C'est une relation de la forme (**6**), dans laquelle un au moins des coefficients (celui de u_p) n'est pas nul.

De ce théorème et du précédent, on tire la conclusion suivante :

204. Intégration de l'équation linéaire sans second membre. — *L'intégration complète de l'équation linéaire sans second membre revient à la détermination de n intégrales particulières, linéairement indépendantes, $u_1, u_2, \dots u_n$; l'intégrale générale est donnée par la formule*

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n,$$

et il n'y a pas de solution singulière.

205. Théorème III. — *Si les deux équations linéaires sans second membre :*

$$y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots X_n y = 0, \qquad y^n + \xi_1 y^{n-1} + \cdots + \xi_n y = 0,$$

ont la même intégrale générale, elles sont identiques terme pour terme.

En effet, leur différence

$$(X_1 - \xi_1) y^{n-1} + (X_2 - \xi_2) y^{n-2} + \cdots + (X_n - \xi_n) y = 0$$

est aussi vérifiée par cette intégrale générale, donc par des valeurs arbitraires de $y, y', \dots y^{n-1}$, ce qui exige qu'on ait $X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_2, \dots$

Le théorème précédent permet de montrer facilement que le premier membre de l'équation linéaire, ramené à la forme

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y,$$

s'exprime de différentes manières par des wronskiens, quand on connaît n intégrales, linéairement indépendantes, $u_1, u_2, .. u_n$, ou l'intégrale générale de l'équation $f(y) = 0$. C'est ce que nous allons faire.

206. Première expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Formons l'équation linéaire d'ordre n

$$W(u_1, u_2, \ldots u_n, y) = 0\,;$$

elle revient à $f(y) = 0$. car, $u_1, u_2, \ldots u_n$ en étant n intégrales particulières, elle a la même intégrale générale. Pour réduire son premier membre à $f(y)$, il suffit donc de le diviser par le coefficient de y_n, d'où l'identité

$$(8) \qquad f(y) = \frac{W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)}{W(u_1, u_2, \ldots u_n)}$$

207. Formule de Liouville. Intégrale première de l'équation sans second membre. — Si l'on écrit $W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)$ sous forme de déterminant, on remarque que, d'après la règle pour former la dérivée d'un wronskien (nº 201), le mineur relatif à y^{n-1} est

$$-W'(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Identifions donc des coefficients de y^{n-1} dans les deux membres de la relation (8) ; il vient, W étant le wronskien de $u_1, u_2, \ldots u_n$,

$$(9) \qquad \frac{W'}{W} = -X_1 \quad , \quad \text{d'où} \quad W = Ce^{-\int X_1 dx}$$

Cette formule est due à *Liouville*. On en déduit une conséquence importante :

On obtient immédiatement une intégrale première de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, si l'on en connaît $(n-1)$ solutions indépendantes $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.

Remplaçons, en effet, y par l'intégrale générale $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_u$ dans le wronskien

$$W(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, y)\,;$$

il vient, par la formule de Liouville,

$$W(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, y) = C_n W = Ce^{-\int X_1 dx}$$

Donc l'équation différentielle d'ordre $n-1$

(10) $$W(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, y) = Ce^{-\int X_1 dx}$$

est vérifiée par l'intégrale générale de $f(y) = 0$. *C'est donc une intégrale première de* $f(y) = 0$ et nous verrons (nº 214) que l'intégration s'achève par des quadratures

208. Seconde expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Multiplicateurs. — Désignons, comme au nº précédent, par W le wronskien $W(u_1, u_2, \ldots u_n)$; par $W_i(y)$ le même wronskien dans lequel une des fonctions u seulement, la fonction u_i, a été remplacée par y. Formons l'équation linéaire d'ordre n (D désignant une dérivée)

(11) $$D. \frac{W_i(y)}{W} = 0,$$

cette équation admet les n intégrales particulières $u_1, u_2, \ldots u_n$, car le rapport à dériver est égal à 1 si $y = u_i$, et à 0 si y est égal à une autre fonction u. Donc, pour réduire le premier membre de cette équation à $f(y)$, il suffit de le diviser par le coefficient de y^n.

Soient, en général, w_i^k le mineur de W relatif à l'élément u_i^k, w_i le mineur relatif à u_i; on aura

$$W_i(y) = w_i^{n-1} y^{n-1} + w_i^{n-2} y^{n-2} + \cdots + w_i y.$$

Donc le coefficient de y^n dans l'équation (11) est $w_i^{n-1} : W$. On en conclut que l'on a, pour $i = 1, 2, \ldots n$, l'identité

(12) $$D.\frac{W_i(y)}{W} = D.\frac{w_i^{n-1} y^{n-1} + w_i^{n-2} y^{n-2} + \cdots w_i y}{W} = \frac{w_i^{n-1}}{W} f(y).$$

Il résulte de là que si l'on multiplie l'équation $f(y) = 0$ par l'une des n quantités $w_i^{n-1} : W$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, on transforme son premier membre dans une dérivée exacte. Ces facteurs sont des *multiplicateurs* de l'équation et nous ferons la théorie de ces multiplicateurs au paragraphe 3.

209. Division symbolique. — I. *Etant donnés deux polynomes symboliques d'ordres m et n $(m \geqslant n)$*

$$A(y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots, \qquad B(y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \cdots,$$

les lettres $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ *désignant des fonctions connues de x, il est toujours possible de déterminer deux nouveaux polynomes symboliques* Q *et* R *tels qu'on ait, quel que soit y,*

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y)$$

Q *étant d'ordre $m - n$ et* R *d'ordre $< n$.*

Cette opération peut s'appeler la *division* de A par B ; Q est le *quotient*, R le *reste*. Si R est identiquement nul, on dira que A est *divisible* par B.

Pour établir ce théorème, mettons la seconde équation de l'énoncé sous la forme

$$y^n = \frac{1}{B_0}(B - B_1 y^{n-1} - B_2 y^{n-2} - \dots).$$

Dérivons-la $m - n$ fois de suite et remplaçons chaque fois dans le second membre y^n, y^{n+1},... y^{m-1} par leurs valeurs déjà trouvées ; nous obtiendrons y^n, y^{n+1},... y^m en fonction linéaire de B, B',... B^{m-n} et de y, y',... y^{n-1}. Portons ces valeurs dans le premier polynome $A(y)$; il viendra

$$A(y) = Q(B) + R(y),$$

Q (B) désignant un polynome symbolique en B, B',... B^{m-n} et R un polynome symbolique en y, y,... y^{n-1}. C'est la relation qu'il fallait établir.

II. *Sous les conditions énoncées, les polynomes* Q *et* R *ne peuvent être déterminés que d'une seule manière.*

En effet, soient Q_1 et R_1 deux autres polynomes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura, quel que soit y,

$$Q[B(y)] - Q_1[B(y)] = R_1(y) - R(y).$$

Il résulte de là que l'expression linéaire (d'ordre $n - 1$) $R_1(y) - R(y)$ est annulée par l'intégrale générale de l'équation (d'ordre n) $B(y) = 0$, donc par des valeurs arbitraires de y, y',... y^{n-1}. Donc tous les coefficients de cette expression sont nuls et l'on a identiquement $R_1 = R$.

La relation se réduit alors à $Q[B(y)] = Q_1[B(y)]$. Celle-ci ayant lieu $B(y)$ restant arbitraire, on aura identiquement $Q = Q_1$.

Remarque. — Les calculs de la division symbolique pourraient aussi se faire, comme ceux de la division algébrique, en déterminant successivement chaque terme du quotient. Formons d'abord la différence.

$$A(y) - \frac{A_0}{B_0} B^{m-n}(y) = C(y) = C_0 y^p + C_1 y^{p-1} + \dots$$

Ce sera un polynome d'ordre $p < m$, car le terme en y^m disparaît. Si $C(y)$ est d'ordre $< n$, la division est terminée et ce polynome est le reste. Dans le cas contraire, on formera une nouvelle différence d'ordre $q < p$

$$C(y) - \frac{C_0}{B_0} B^{p-n}(y) = D(y) = D_0 y^q + D_1 y^{q-1} + \dots$$

et on continuera ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une différence $R(y)$ d'ordre $< n$. Ce sera le reste. Le quotient $Q(B)$ sera donné par la formule

$$Q(B) = \frac{A_0}{B_0} B^{m-n} + \frac{C_0}{B_0} B^{p-n} + \frac{D_0}{B_0} B^{q-n} + \dots$$

210. Solutions communes à deux équations. — *Les solutions communes aux deux équations $A(y) = 0$ et $B(y) = 0$ d'ordres m et n respectivement $(m \geqslant n)$, sont celles d'une équation linéaire et sans second membre d'ordre $\leqslant n$, que l'on peut former par un calcul analogue à celui du plus grand commun diviseur de deux polynomes algébriques.*

En effet, divisons A par B et considérons l'identité

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y).$$

On en conclut que les équations $A = 0$ et $B = 0$ d'une part, les équations $B = 0$ et $R = 0$ d'autre part, ont les mêmes intégrales communes.

Si $A = 0$ admet toutes les intégrales de $B = 0$, il faut donc que R soit identiquement nul (ou A divisible par B), sinon R, qui est d'ordre $< n$, ne pourrait être annulé par l'intégrale générale de l'équation $B = 0$, qui est d'ordre n. Réciproquement, si R est identiquement nul, les solutions communes seront données par l'intégrale générale de $B = 0$.

Si R n'est pas identiquement nul, nous sommes ramenés à chercher les intégrales communes à B et à R. Nous divisons B par R, ce qui fournit un nouveau reste R_1 et ainsi de suite. Comme les ordres des restes vont en décroissant, l'opération ne peut se poursuivre indéfiniment; on arrivera donc à un premier reste R_n divisant exactement le précédent et, par suite, tous les autres. Ce reste R_n est le polynome symbolique de l'ordre le plus élevé qui divise à la fois A et B, il peut s'appeler *le plus grand commun diviseur* de A et de B. Les solutions communes aux deux équations $A = 0$ et $B = 0$ sont fournies par l'intégrale de $R_n = 0$.

Les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ ont toujours $y = 0$ comme intégrale commune, en d'autres termes, les deux polynomes A et B sont toujours divisibles par y. S'ils n'ont pas d'autre diviseur commun, on peut dire qu'ils sont *premiers entre eux*. Dans ce cas, les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ n'ont pas d'autre solution commune que $y = 0$.

§ 2. Équations linéaires avec second membre. Abaissement de l'ordre des équations linéaires.

211. Équations avec second membre. Forme de l'intégrale générale. — L'équation linéaire *non homogène*, ou *avec second membre*, ou encore *complète*, contient un terme X indépendant de y et de ses dérivées. L'équation d'ordre n se ramène donc à la forme

$$(1) \qquad f(y) = X$$

où $f(y)$ désigne, comme précédemment, le polynome symbolique

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y.$$

On a le théorème suivant :

L'intégrale générale de l'équation complète est la somme d'une intégrale particulière de cette équation et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Il n'y a pas de solution singulière.

En effet, soit y_1 une intégrale particulière de l'équation (**1**) ; on aura $f(y_1) = X$. Substituons à y une nouvelle inconnue z par la relation $y = y_1 + z$. L'équation (**1**) deviendra

$$f(y_1 + z) = f(y_1) + f(z) = X.$$

Elle se réduit à $f(z) = 0$. Donc z est l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Celle-ci n'ayant pas de solution singulière, l'équation (**1**) n'en a pas non plus.

Le théorème précédent fait connaître la forme de l'intégrale générale de l'équation complète. Il ramène la détermination de cette intégrale à l'intégration de l'équation sans second membre et à la recherche d'une intégrale particulière de l'équation complète. C'est une méthode d'intégration qui peut être utilisée dans des cas particuliers. Nous en verrons des exemples au paragraphe 5. Mais le théorème général pour l'intégration de l'équation avec second membre est le suivant :

212. Intégration de l'équation linéaire avec second membre. — *L'intégration de l'équation linéaire complète d'ordre n se ramène à celle de l'équation sans second membre et à n quadratures.*

Ce résultat s'obtient immédiatement en se reportant aux formules du numéro 208. Soit l'équation $f(y) = X$. Multiplions-la par le multiplicateur $w_i^{n-1} : W$. Il vient, par l'idendité (**12**) de ce numéro,

$$D \frac{w_i^{n-1} y^{n-1} + w_i^{n-2} y^{n-2} + \cdots + w_i y}{W} = \frac{w_i^{n-1}}{W} X,$$

et, en intégrant,

$$w_i^{n-1} y^{n-1} + w_i^{n-2} y^{n-2} + \cdots + w_i y = W \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X \, dx.$$

Multiplions cette relation par u_i et sommons pour $i = 1, 2, \ldots n$. Comme les mineurs w_i^k $(i = 1, 2, .., n)$ sont ceux de la $(k-1)^{me}$ ligne du déterminant W, le coefficient de y sera W, ceux de $y', y'' \ldots$ seront

nuls. Il viendra donc, en supprimant le facteur commun W qui n'est pas nul,

$$y = \sum_{i=1}^{n} u_i \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X\, dx. \tag{2}$$

C'est la formule générale d'intégration de l'équation avec second membre. Comme elle ne comporte que n constantes d'intégration. ces constantes sont arbitraires et indépendantes. L'intégrale générale s'obtient, comme on le voit, par n quadratures, quand les fonctions u et, par suite, les fonctions W et w sont connues.

Remarque I. — Le théorème du n° précédent peut se déduire de cette formule, car, si l'on détache dans chaque terme la constante arbitraire C_i comprise dans l'intégrale indéfinie, l'ensemble des termes renfermant des constantes sera $\Sigma C_i u_i$, ce qui est l'intégrale de l'équation sans second membre. La formule se réduit aux termes restants en annulant les constantes C_i ; donc ces termes forment une intégrale particulière de l'équation complète.

Remarque II. — Si, au lieu de multiplier les équations par u_1, $u_2, \dots u_n$ avant de les ajouter, on les avait multipliées par u_1^k, $u_2^k, \dots$ u_n^k, on aurait obtenu, pour $k = 1, 2, \dots n-1$,

$$y^k = \sum_{i=1}^{n} u_i^k \int \frac{w_i^{n-1}}{W} X\, dx.$$

213. Méthode de Lagrange (variation des constantes) et méthode de Cauchy. — On peut présenter sous différentes formes les calculs à faire pour obtenir l'intégrale générale de l'équation complète, connaissant celle de l'équation sans second membre. Il y a deux méthodes qui méritent particulièrement d'être signalées ici : ce sont celles de la variation des constantes arbitraires (Lagrange) et celle de Cauchy. Ce sont d'autres raisonnements qu'au n° précédent, mais en réalité les calculs sont les mêmes, à fort peu de chose près.

Nous désignerons dans ce n° par $\varphi(x)$, au lieu de X, le second membre de l'équation linéaire. Soit donc à intégrer l'équation complète d'ordre n

$$f(y) = \varphi(x), \tag{3}$$

connaissant l'intégrale générale

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i \tag{4}$$

de l'équation sans second membre.

1° Méthode de la variation des constantes. — Soient y l'intégrale

de l'équation (**3**) et $C_1, C_2 \ldots C_n$ des fonctions de x, définies par le système linéaire (de déterminant W différent de 0)

$$(5) \qquad y = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i, \qquad y' = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i', \ldots, \qquad y^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i^{n-1}$$

où les dérivées de y ont donc la même forme que si les C étaient constants.

Exprimons d'abord que y est l'intégrale de (**3**). Il faut dériver la dernière équation (**5**), ce qui donne

$$y^n = \Sigma C_i u_i^n + \Sigma u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx},$$

et porter ces valeurs de $y, y', \ldots y^n$ dans (**3**). Il vient, $f(u_i)$ étant nul pour $i = 1, 2, \ldots n$,

$$(6) \qquad \sum_i u_i^{n-1} \frac{dC_i}{dx} = \varphi(x).$$

Donc l'intégrale cherchée y et les fonctions $C_1, C_2, \ldots C_n$ sont définies par les équations (**5**) et (**6**).

D'autre part, le système (**5**) peut être remplacé par la première, $y = \Sigma C u$, de ces équations, jointe au système.

$$(7) \qquad \sum_i u_i \frac{dC_i}{dx} = 0, \quad \sum_i u_i' \frac{dC_i}{dx} = 0, \qquad \sum_i u_i^{n-2} \frac{dC_i}{dx} = 0,$$

en vertu duquel les dérivées successives de y ont la forme (**5**).

Mais les équations (**6**) et (**7**) forment un système d'équations linéaires, résoluble par rapport aux dérivées des fonctions C. On en tire les valeurs de ces dérivées en fonction de x, ensuite les valeurs des fonctions C par n quadratures. L'intégrale générale cherchée s'obtient en portant ces valeurs dans $y = \Sigma C u$.

2° Méthode de Cauchy. — Soit α un paramètre arbitraire. Remplaçons x par α dans l'intégrale générale (**4**) de $f(y) = 0$, et déterminons les constantes C de l'intégrale générale y ainsi modifiée par le système d'équations, linéaires par rapport aux lettres C,

$$y = 0, \qquad y' = 0, \ldots \qquad y^{n-2} = 0, \qquad y^{n-1} = \varphi(\alpha),$$

d'où l'on tire les valeurs des constantes C en fonction de α. Portons ces valeurs dans l'intégrale générale $y = \Sigma C u$ où les u sont maintenant fonctions de x ; nous obtenons $y = \psi(x, \alpha)$. *Je dis que l'intégrale définie*

$$1 = \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha$$

est une solution particulière de $f(y) = \varphi(x)$.

En effet, on a, par hypothèse,

$$\psi(\alpha, \alpha) = 0, \quad \psi_x'(\alpha, \alpha) = 0, \ldots \quad \psi_x^{n-2}(\alpha, \alpha) = 0, \quad \psi_x^{n-1}(\alpha, \alpha) = \varphi(\alpha).$$

Or α, étant quelconque, peut être remplacé par toute autre lettre. On a donc aussi

$$\psi(x, x) = 0,\ \psi'_x(x, x) = 0,\dots\quad \psi_x^{n-2}(x, x) = 0,\quad \psi_x^{n-1}(x, x) = \varphi(x).$$

Différentions $(n - 1)$ fois I en tenant compte de ces relations, il vient

$$\mathrm{I}' = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\psi}{\partial x}\, d\alpha,\ \dots,\quad \mathrm{I}^{n-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial x^{n-1}}\, d\alpha,\quad \mathrm{I}^{n} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n}\psi}{\partial x^{n}}\, d\alpha + \varphi(x).$$

Substituons ces valeurs dans $f(\mathrm{I})$ et observons, que $\psi(x, \alpha)$ étant une intégrale de $f(y) = 0$, on a $f(\psi) = 0$; il vient (C. Q. F. D.)

$$f(\mathrm{I}) = \int_{x_0}^{x} f(\psi)\, d\alpha + \varphi(x) = \varphi(x),$$

L'intégrale générale de l'équation complète s'obtiendra en ajoutant I à l'intégrale de $f(y) = 0$. Elle sera donc.

$$y = \Sigma \mathrm{C}u + \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

214. Cas général où l'équation sans second membre s'intègre par des quadratures (1) .— *Si l'on connait n solutions indépendantes* $u_1, u_2 \dots u_n$ *de l'équation linéaire sans second membre d'ordre* $n + 1$

$$y^{n+1} + \mathrm{X}_1 y^n + \cdots + \mathrm{X}_{n+1} y = 0,$$

l'intégration s'achève par $n + 1$ *quadratures.*

En effet, le théorème de Liouville fournit une intégrale première par une quadrature. Il vient, en changeant n en $n + 1$ dans la formule du n° 207,

$$\mathrm{W}(u_1, u_2, \dots u_n, y) = e^{\int \mathrm{X}_1 dx}$$

C'est une équation d'ordre n avec second membre. Pour ramener le coefficient de y^n à l'unité, il faut diviser l'équation par $\mathrm{W}(u_1, u_2, \dots u_n)$ que nous désignerons simplement par W. Cela fait, l'intégrale générale est fournie par la formule (2) du n° 212, qui devient (le sens des notations w_i^{n-1} n'étant pas changé)

$$(7)\qquad y = \sum_{i=1}^{n} u_i \int \frac{w_i^{n-1}\, dx}{\mathrm{W}^2}\, e^{-\int \mathrm{X}_1\, dx}$$

ce qui comporte n nouvelles quadratures.

215. Application à l'équation du second ordre. — *L'équation linéaire*

(1) Remarquons que l'équation complète s'intègre toujours par quadratures en même temps que l'équation sans second membre (n° 212).

et sans second membre du 2ᵉ ordre s'intègre par deux quadratures quand on en connaît une solution particulière u_1.

Soit u_1 une intégrale particulière de l'équation

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0.$$

L'intégrale première de Liouville (nº 207) est

$$W(u_1, y) = u_1^2 D \frac{y}{u_1} = e^{-\int X_1 dx}$$

et il vient, par une nouvelle quadrature,

(8) $$y = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx}$$

En particulier, si $X_1 = 0$, l'exponentielle se réduit à une constante C.

Par conséquent, si u_1 est une intégrale particulière de l'équation $y'' + Xy = 0$, l'intégrale générale sera

(9) $$y = Cu_1 \int \frac{dx}{u_1^2}.$$

216. Méthode d'abaissement de d'Alembert. — I. *Si l'on connaît une intégrale particulière* u_1, *autre que* 0, *de l'équation d'ordre n linéaire et sans second membre* $f(y) = 0$, *l'intégration se ramène à celle d'une équation de même nature, mais d'ordre* $n - 1$, *et à une quadrature.*

En effet, changeons d'inconnue par la relation

$$y = u_1 z.$$

Les dérivées $y', y'', \dots$ se calculent par la formule

$$y^p = z u_1^p + p z' n_1^{p-1} + \cdots + z^p u_1 \qquad (p = 1, 2, \dots n)$$

Portons ces valeurs de $y, y', \dots y^n$ dans $f(y) = 0$. Le coefficient de z^n sera u_1, celui de z sera $f(u_1)$ qui est nul, de sorte que le terme en z disparaîtra. Donc, si l'on désigne par les lettres Z des fonctions connues de x, l'équation en z sera

(10) $$u_1 z^n + Z_1 z^{n-1} + \cdots Z_{n-1} z' = 0.$$

Mais cette équation linéaire sans second membre se réduit à l'ordre $n - 1$ en prenant z' pour inconnue. Connaissant z', on obtient z par une quadrature, et l'intégrale cherchée sera $y = u_1 z$.

II. *Si l'on connaît* $p (p < n)$ *solutions indépendantes de l'équation* $f(y) = 0$ *d'ordre n, on en déduit* $p - 1$ *solutions indépendantes (donc autres que* 0*) de l'équation en* z' *qui précède* (10).

En effet $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)'$, $\left(\frac{u_3}{u_1}\right)'$,... $\left(\frac{u_p}{u_1}\right)'$ sont des solutions de cette équation, entre lesquelles n'existe aucune relation à coefficients constants (non tous nuls) de la forme

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right)' + \alpha_3\left(\frac{u_3}{u_1}\right)' + \cdots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right)' = 0,$$

car, s'il existait une relation semblable, en l'intégrant et en désignant par α_1 une nouvelle constante, on en déduirait

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right) = -\alpha_1, \quad \text{d'où} \quad \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0.$$

et les solutions de $f(y) = 0$ ne seraient pas indépendantes.

Donc, en appliquant la proposition I à l'équation (**10**) en z', on peut abaisser son ordre d'une unité et l'on connaîtra, par la proposition II, $p - 2$ solutions indépendantes de l'équation d'ordre $n - 2$ ainsi obtenue. Celle-ci à son tour se ramènera à une équation d'ordre $n - 3$ dont on connaîtra $p - 3$ solutions indépendantes. On peut continuer ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une équation d'ordre $n - p$.

D'où la proposition suivante :

III. *Si l'on connaît p ($p < n$) solutions indépendantes de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$ et à des quadratures.*

Nous allons préciser ce théorème dans le n° suivant et, en même temps, en donner une autre démonstration, qui va plus au fond des choses.

217. Théorème général sur l'abaissement de l'ordre des équations linéaires. — *Si l'on connait p ($p < n$) solutions indépendantes de l'équation d'ordre n, linéaire sans second membre, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$ et à $p(n - p)$ quadratures distinctes.*

Soit $f(y) = 0$ cette équation d'ordre n; désignons par u_1, u_2,... u_p les p intégrales connues et formons l'équation différentielle d'ordre p

$$\varphi(y) = 0$$

qui a pour intégrale générale $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_p u_p$. Le polynome symbolique $\varphi(y)$ ne diffère du wronskien

$$W(u_1, u_2, \ldots u_p, y)$$

que par un facteur, fonction de x, que l'on peut choisir à volonté. Puis-

que $f(y) = 0$ admet les intégrales de $\varphi(y) = 0$, le polynome f est divisible par φ (nº 209) et si l'on désigne par $Q(\varphi)$ un polynome de degré $n - p$, qui s'obtient par la division, on a l'identité

$$f(y) = Q[\varphi(y)].$$

L'équation $f(y) = 0$ se décompose donc en deux autres :

$$\varphi(y) = z, \qquad Q(z) = 0$$

La seconde est une équation linéaire sans second membre d'ordre $n-p$, qui détermine z avec $n - p$ constantes arbitraires. La première est une équation linéaire d'ordre p, avec second membre, mais on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre, cette équation détermine donc y par p quadratures, quand z est connu. Toutefois, comme z entre en facteur dans chacune des p fonctions à intégrer et que z est linéaire par rapport $n - p$ constantes arbitraires, chaque intégrale se décompose en $n - p$ autres multipliées par ces constantes et qui doivent, par conséquent, se déterminer séparément. Il y aura donc en tout $p(n - p)$ quadratures distinctes à effectuer.

Remarques. — I. Si l'on connaît $n - 1$ solutions indépendantes de l'équation sans second membre d'ordre n, l'ordre $n - p$ se réduit à 1 et l'intégration se fait par des quadratures, résultat connu (nº 214).

II. Si l'on connaît $p (p < n)$ solutions *indépendantes* de l'équation sans second membre d'ordre n, l'intégration de l'équation complète se ramène à celle d'une équation sans second membre d'ordre $n - p$ et à $p(n - p) + n$ quadratures. En effet, il reste n quadratures à faire quand on a intégré l'équation sans second membre.

III. Les nombres de quadratures dont il s'agit dans ces théorèmes sont relatifs aux équations de la forme la plus générale. Si l'on considère des équations de forme spéciale, par exemple des équations où X_1 est nul, certaines de ces quadratures sont immédiates et leur nombre peut se réduire. Nous l'avons déjà observé pour l'équation du second ordre (nº 215).

§ 3. Multiplicateurs des équations linéaires.

218. Multiplicateur. — Considérons l'expression symbolique

(1) $$f(x) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y.$$

Un *multiplicateur de* $f(y)$ ou *un multiplicateur de l'équation* $f(y) = X$, est un facteur μ, fonction de x seul, tel que le produit $\mu f(y)$ soit la dérivée d'une fonction de $x, y, y', \ldots y^{n-1}$ et cela quel que soit y.

Il existe toujours des multiplicateurs et ce sont les intégrales d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n.

En effet, considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \mu f(y)\, dx = \int \mu (y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y)\, dx.$$

Transformons-la par intégration par parties de manière à ne plus avoir de dérivée de y sous le signe $\int$. On a

$$\int \mu X_{n-1} y'\, dx = \mu X_{n-1} y - \int (\mu X_{n-1})'\, dx.$$

$$\int \mu X_{n-2} y''\, dx = \mu X_{n-2} y' - (\mu X_{n-2})' y + \int (\mu X_{n-2})'' y\, dx$$

. . . .

Par la substitution de ces valeurs, il vient, Ω désignant la somme des termes intégrés,

$$(2) \begin{cases} \int \mu f(y)\, dx = \Omega + \int y[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \cdots + (-1)^n \mu^n]dx. \\ \Omega = \mu y^{n-1} + [\mu X_1 - \mu'] y^{n-2} + \cdots \end{cases}$$

Donc, pour que μ soit un multiplicateur, il suffit que μ vérifie l'équation linéaire d'ordre n

$$(3) \qquad \mu^n - (\mu X_1)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \mu X_n = 0.$$

Réciproquement, tout multiplicateur doit vérifier cette équation, sinon, comme on le voit en dérivant l'équation (2), l'expression $y[\mu X^n - (\mu X_{n-1})' + \cdots]$, qui est encore sous le signe $\int$ au second membre serait la dérivée d'une fonction de x, y, y',... ce qui est impossible, car elle ne contient pas de dérivée de y.

219. Equation adjointe. — L'équation des multiplicateurs ou l'équation (3) s'appelle l'*équation adjointe* de $f(y) = 0$. Il existe une complète réciprocité entre ces deux équations. *L'équation* $f(y) = 0$ *est réciproquement l'adjointe de l'équation* (3), *c'est-à-dire l'équation de ses multiplicateurs*

En effet, si y est une intégrale de $f(y) = 0$, la relation (2) devient

$$\int y\, [\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \cdots]\, dx = -\Omega,$$

où Ω est une fonction explicite de μ, μ',... Donc y est un multiplicateur de $\mu X_n - (\mu X_{n-1}) + \cdots$, ce qui prouve la proposition.

220. Théorème. — *Les intégrations complètes de deux équations adjointes sont deux problèmes complètement équivalents.*

En effet, supposons qu'on connaisse n solutions indépendantes u_1,

$u_2, \dots u_n$ de l'équation $f(y) = 0$; on obtient n multiplicateurs, donc n solutions de l'équation adjointe, par les formules (n° 208)

$$\mu_1 = \frac{w_1^{n-1}}{W}, \qquad \mu_2 = \frac{w_2^{n-1}}{W}, \dots \qquad \mu_n = \frac{w_n^{n-1}}{W}.$$

Il reste seulement à montrer que ces multiplicateurs sont *linéairement indépendants*. Supposons, par impossible, que ces multiplicateurs ne soient pas indépendants ; on aura une identité de la forme $\Sigma \alpha_i w_i^{n-1} = 0$ où les α sont des constantes non toutes nulles. Ajoutons alors toutes les identités (**12**) du n° 208 respectivement multipliées par α_i ; il vient, quel que soit y,

$$\mathrm{D}\frac{y^{n-2}\,\Sigma\alpha_i w_i^{n-1} + \cdots + y\,\Sigma\alpha_i w_i}{W} = 0,$$

ce qui ne peut subsister que si toutes les sommes Σ sont nulles. On aurait donc, pour des valeurs non toutes nulles des α, le système d'équations

$$\Sigma\alpha_i w_i = 0, \qquad \Sigma\alpha_i w'_i = 0, \dots \qquad \Sigma\alpha_i w_i^{n-1} = 0,$$

ce qui est impossible, car le déterminant des quantités w, qui est l'adjoint de W et est égal à W^{n-1}, n'est pas nul (W ne l'étant pas).

221. Théorème. — *Si l'on connait p ($p < n$) multiplicateurs linéairement indépendants d'une équation linéaire d'ordre n, avec ou sans second membre, on peut abaisser l'ordre de l'équation de p unités sans que l'équation cesse d'être linéaire.*

Considérons une équation d'ordre n

$$(4) \qquad y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y = X.$$

Multiplions-la par un multiplicateur μ_i et intégrons. Le premier membre s'intègre exactement et l'on obtient une intégrale première de cette équation, qui sera de la forme

$$(5) \qquad a_i y^{n-1} + b_i y^{n-2} + c_i y^{n-3} + \dots = \int \mu_i X\, dx.$$

Le premier membre de (**5**) n'est autre chose que l'expression Ω du n° 218. Les lettres a_i, b_i, $c_i, \dots$ sont des fonctions connues de x, ayant pour valeurs, d'après la formule (**2**) de ce numéro,

$$a_i = \mu_i, \qquad b_i = \mu_i X_1 - \mu'_i, \qquad c_i = \mu_i X_2 - (\mu_i X_2)' + \mu''_i, \dots$$

Si l'on connaît p multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_p$, on obtient ainsi p intégrales premières, comprises dans l'équation (**5**) pour $i = 1, 2, \dots p$. Ces intégrales premières sont distinctes, c'est-à-dire qu'elles forment un système d'équations résoluble par rapport à y^{n-1}, $y^{n-2}, \dots y^{n-p}$. En effet,

le déterminant des coefficients de ces inconnues dans ce système d'équations est

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 X_1 - \mu_1' & \dots \\ \mu_2 & \mu_2 X_1 - \mu_2' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1' & \mu_1'' & \dots \\ \mu_2 & \mu_2' & \mu_2'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

C'est un wronskien qui ne s'annule pas, puisque μ_1, $\mu_2, \dots \mu_p$ sont, par hypothèse, linéairement indépendants.

En résolvant ce système par rapport à y^{n-p}, on obtient une équation linéaire d'ordre $n - p$ pour déterminer y. Le théorème est ainsi établi.

Remarque. — Le théorème précédent fournit une nouvelle démonstration de celui du nº 216 relativement à l'abaissement de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n, dont on connaît p intégrales linéairement indépendantes. Ces p intégrales sont des multiplicateurs de l'équation adjointe ; l'ordre de celle-ci peut donc s'abaisser de p unités. Ceci fait, l'intégration de l'adjointe et, par conséquent, l'intégration de l'équation proposée (nº 220) ne dépendent plus que de l'intégration d'une équation d'ordre $n - p$.

§ 4. Intégration des équations linéaires à coefficients constants et sans second membre.

222. Caractère algébrique du problème. — L'intégration des équations à coefficients constants avec ou sans second membre dépend étroitement de deux problèmes d'algèbre : 1° La détermination des racines d'un polynome ; 2° la décompositon d'une fraction rationnelle en fractions simples. Pour mettre cette dépendance en pleine lumière, il importe de définir et d'étudier les symboles d'opération avec le signe de dérivation D.

223. Opérations définies par des polynomes en D. Sommes et produits d'opérations. — Soient a_1, $a_2, \dots$ des coefficients constants, D le signe de dérivation par rapport à x. Posons

$$(1) \qquad f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots a_{n-1} D + a_n .$$

L'expression $f(D)$ est un symbole d'opération, dont le sens s'interprète immédiatement en convenant que si y désigne une fonction de x, on a

$$f(D)\, y = D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_n y$$

On remarquera que, dans le cas particulier où $f(D) = 1$, on a $f(D)y = y$. Donc, dans ce cas, $f(D)$ désigne une *opération d'effet nul.*

Les symboles opératoires à coefficients constants tels que (1), jouissent de propriétés qui les rapprochent des polynomes algébriques.

1° SOMMES D'OPÉRATIONS. — En premier lieu, si $f(D)$ et $f_1(D)$ sont deux polynomes symboliques et qu'on représente par $f(D) + f_1(D)$ leur somme effectuée, on a, par les propriétés des dérivées,

$$f(D)y + f_1(D)y = [f(D) + f_1(D)]y.$$

Donc l'opération $f(D) + f_1(D)$ peut s'appeler la *somme des opérations* $f(D)$ et $f_1(D)$ et les sommes ainsi définies jouissent des propriétés des sommes algébriques. En particulier, l'opération $f(D)$ est la somme des opérations définies par chacun de ses termes.

2° PRODUITS D'OPÉRATIONS. — Considérons d'abord un certain nombre de symboles linéaires $D + a$, $D + b$,... $D + l$. Nous pouvons définir l'opération

$$(D + l) \dots (D + b)\,(D + a) \tag{2}$$

en convenant qu'on opère d'abord avec le facteur $(D + a)$, puis sur le résultat avec $(D + b)$ et ainsi de suite. Or, en effectuant ces opérations, on constate immédiatement qu'on obtient le même résultat que si l'on avait exécuté l'opération unique, définie par le produit algébrique $(D + l) \dots (D + a)$ préalablement effectué.

L'opération (2) peut donc s'appeler le *produit* des opérations définies par chaque facteur et ce produit est indépendant de l'ordre des facteurs. Si le produit se compose de m facteurs égaux $D + a$, on le représentera donc par $(D + a)^m$ comme en algèbre.

On définirait d'une manière analogue l'opération

$$f(D)\, f_1(D)\, f_2(D) \dots$$

composée de facteurs de degrés quelconques. On verrait que celle-ci aussi est indépendante de l'ordre des facteurs. Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que chaque polynome $f(D)$ peut, par les règles de l'algèbre, se décomposer en facteurs linéaires, ce qui ramène au cas précédent. Nous reviendrons sur cette décomposition dans le n° suivant.

225. Décomposition des polynomes en facteurs et des fractions rationnelles en fractions simples. Formules symboliques qui s'en déduisent. — 1° DÉCOMPOSITION EN FACTEURS. — Considérons l'équation algébrique de degré n (D étant considéré comme une quantité)

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Cette équation admet toujours n racines qui peuvent être égales ou distinctes, réelles ou imaginaires. Nous représenterons les racines différentes par $r, s, t, \ldots$ leurs ordres de multiplicité respectifs par $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ Connaissant ces racines, on connaît aussi la décomposition de $f(\mathrm{D})$ en facteurs linéaires. On a

$$(3) \qquad f(\mathrm{D}) = (\mathrm{D}-r)^{\lambda}(\mathrm{D}-s)^{\mu}(\mathrm{D}-t)^{\nu}\cdots$$

Considérons maintenant $f(\mathrm{D})$ comme un symbole d'opération et rappelons-nous les résultats du n° précédent. Nous voyons que l'opération $f(\mathrm{D})$ peut se décomposer en une suite d'opérations consécutives, définies par un seul des symboles $\mathrm{D}-r$, $\mathrm{D}-s, \ldots$ et effectuées dans un ordre arbitraire.

2° Décomposition en fractions simples. — La décomposition de $f(\mathrm{D})$ en facteurs se faisant par la formule (**3**), celle de $1 : f(\mathrm{D})$ en fractions simples se fera par la formule

$$(4) \quad \frac{1}{f(\mathrm{D})} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{D}-r} + \frac{\mathrm{A}_2}{(\mathrm{D}-r)^2} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_\lambda}{(\mathrm{D}-r)^\lambda} + \frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{D}-s} + \cdots$$

où $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{B}_1, \ldots$ sont des constantes réelles ou imaginaires, que nous avons appris à calculer (Tome I, n°s 138 et 139).

Représentons par

$$\frac{f(\mathrm{D})}{(\mathrm{D}-r)}, \quad \frac{f(\mathrm{D})}{(\mathrm{D}-r)^2}, \ldots \frac{f(\mathrm{D})}{\mathrm{D}-s}, \ldots$$

les *polynomes* respectivement obtenus en supprimant dans $f(\mathrm{D})$ un facteur $(\mathrm{D}-r)$, deux facteurs $(\mathrm{D}-r), \ldots$ un facteur $(\mathrm{D}-s)$, etc., et mettons l'identité (**4**) sous la forme

$$(5) \quad 1 = \mathrm{A}_1 \frac{f(\mathrm{D})}{\mathrm{D}-r} + \mathrm{A}_2 \frac{f(\mathrm{D})}{(\mathrm{D}-r)^2} + \cdots + \mathrm{A}_\lambda \frac{f(\mathrm{D})}{(\mathrm{D}-r)^\lambda} + \mathrm{B}_1 \frac{f(\mathrm{D})}{\mathrm{D}-s} + \cdots$$

Dans cette nouvelle relation, chaque terme du second membre est un polynome et peut être considéré comme le symbole d'une opération à effectuer. La formule (**5**) montre que la *somme* des opérations définies respectivement par chaque terme du second membre, est une opération d'effet nul. Cette formule nous sera très utile.

225. Relation entre les symboles D et $(\mathrm{D}-r)$. — Soit r une constante et y une fonction de x ; on a

$$\mathrm{D} \,.\, e^{-rx} y = e^{-rx}\mathrm{D}y - e^{-rx} ry = e^{-rx}(\mathrm{D}-r)\, y.$$

Remplaçons, dans cette relation, y par $(D-r)y$; il vient

$$D \,.\, e^{-rx}(D-r)y = e^{-rx}(D-r)^2 y$$

et, en vertu de la relation précédente,

$$D^2 \,.\, e^{-rx} y = e^{-rx}(D-r)^2 y.$$

Remplaçons de nouveau y par $(D-r)y$ et continuons ainsi de de suite. Après λ opérations, nous obtiendrons

$$(6) \qquad D^\lambda \,.\, e^{-rx} y = e^{-rx}(D-r)^\lambda y.$$

226. Equation linéaire à coefficients constants. Equation caractéristique. Equation simple. — Une équation linéaire à coefficients constants est de la forme

$$f(D)\, y = \varphi(x)$$

où l'on a posé, comme ci-dessus (nº 223), les coefficients a étant des constantes,

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n \,.$$

Si $\varphi(x)$ n'est pas nul, l'équation est *complète* ou *avec second membre* ; si $\varphi(x)$ est nul, l'équation est *sans second membre*. On donne le nom d'*équation caractéristique* à l'équation algébrique

$$f(D) = 0.$$

Quand l'équation caractéristique n'a qu'une seule racine distincte, simple ou multiple, l'équation différentielle devient

$$(D-r)^\lambda y = \varphi(x)$$

et nous donnerons le nom d'*équation simple* à une équation de cette forme.

227. Intégration des équations simples sans second membre. — Soit l'équation d'ordre λ

$$(7) \qquad (D-r)^\lambda y = 0.$$

Multiplions-la par e^{-rx}, qui n'est ni nul ni infini, puis transformons-la par la formule (6) ; elle devient

$$D^\lambda \,.\, e^{-rx} y = 0.$$

Donc l'intégration est immédiate, $e^{-rx}y$ est un polynome arbitraire de degré $\lambda - 1$. Soit $P_{\lambda-1}$ ce polynome ; il contient λ constantes arbitraires, qui sont ses coefficients :

$$P_{\lambda-1} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (**7**) sera

$$y = P_{\lambda-1}\, e^{rx}.$$

C'est bien la somme de λ intégrales particulières multipliées respectivement par des constantes C.

228. Intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et sans second membre dans le cas général. — Cette équation est de la forme

$$(8) \qquad f(D)\, y = 0.$$

Son intégration revient à la résolution algébrique de l'équation caractéristique

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à la décomposition de $f(D)$ en ses facteurs linéaires :

$$f(D) = (D-r)^\lambda (D-s)^\mu \cdots (D-t)^\nu .$$

L'intégrale générale sera égale à la somme des intégrales générales de chacune des équations simples :

$$(9) \qquad (D-r)^\lambda y = 0, \qquad (D-s)^\mu y = 0, \ldots \qquad (D-t)^\nu y = 0.$$

et on peut l'écrire immédiatement. Ce sera, sauf une transformation indiquée dans le n° suivant s'il y a des racines imaginaires,

$$(10) \qquad y = P_{\lambda-1}\, e^{rx} + Q_{\mu-1}\, e^{sx} + \cdots + R_{\nu-1}\, e^{tx},$$

P, Q,... R désignant des polynomes en x de degrés marqués par l'indice et dont les coefficients sont les constantes arbitraires de l'intégrale.

Démonstration. — L'ordre des facteurs $(D-r)^\lambda$, $(D-s)^\mu$,... qui entrent dans $f(D)$ étant indifférent, l'équation $f(D)\, y = 0$ peut s'écrire en faisant figurer à volonté l'un quelconque de ces facteurs immédiatement devant y. Donc les intégrales des équations (**9**) sont des solutions particulières de l'équation (**8**) et l'expression (**10**), qui est leur somme, est une intégrale plus générale de cette équation. Mais, de plus, ce sera l'intégrale générale, car nous allons montrer que, réciproquement, toute intégrale de l'équation (**8**) est de la forme (**10**).

A cet effet, isolons successivement, dans $f(D)$, les divers facteurs $(D-r)$, $(D-r)^2$,. . $(D-s)$,... L'équation $f(D)\, y = 0$ s'écrira sous les formes

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{(D-r)}y\right]=0, \quad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2}y\right]=0,\ldots \quad (D-s)\left[\frac{f(D)}{D-s}y\right]=0,\ldots$$

Chacune de ces équations devient une équation simple sans second membre en prenant la quantité entre crochets comme inconnue ; il vient, en les intégrant,

$$\frac{f(D)}{(D-r)}y = P_0 e^{rx}, \quad \frac{f(D)}{(D-r)^2}y = P_1 e^{rx}, \ldots \quad \frac{f(D)}{D-s}y = Q_0 e^{sx}, \ldots$$

les polynomes P étant de degrés $< \lambda$, les polynomes Q de degrés $< \mu$,... Multiplions respectivement ces équations par les constantes A_1, A_2,... B_1... de la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples et ajoutons les. Il vient, par l'identité (**5**) établie au nº 225,

$$y = e^{rx}\Sigma AP + e^{sx}\Sigma BQ + \cdots$$

Comme ΣAQ, ΣBQ,... sont respectivement des polynomes de degré moindre que λ, moindre que μ,... cette expression est de la forme (**10**).

Remarque. — L'expression (**10**) renferme $\lambda + \mu + \cdots = n$ constantes arbitraires, qui sont les coefficients des polynomes P, Q,... On reconnait ainsi, conformément aux théorèmes généraux, que l'intégrale générale de l'équation sans second membre est la somme de n intégrales particulières multipliées par des constantes arbitraires. Ces intégrales particulières sont donc linéairement indépendantes, sinon elles ne fourniraient pas l'intégrale générale. On en conclut que *si r, s,... sont des constantes différentes (réelles ou non), l'identité*

$$P_{\lambda-1}\, e^{rx} + Q_{\mu-1}\, e^{sx} + \cdots = 0$$

ne peut avoir lieu que si les polynomes P, Q,... *sont identiquement nuls* [1].

[1] Il est facile de prouver directement ce théorème. Admettons, par impossible, que cette identité ait lieu pour les valeurs réelles de x, un coefficient au moins de chaque polynome n'étant pas nul. D'abord l'identité subsiste pour les valeurs imaginaires (car son premier membre est alors une somme de séries potentielles qui se détruisent). Soit r celle des quantités r, s,... qui a le plus grand module, ou l'une d'elles s'il y a plusieurs modules égaux. Remplaçons x par $x : r$ et faisons tendre x vers l'infini positif. Après cette substitution (qui n'altère pas nos hypothèses sur les polynomes P, Q,...), l'identité prend la forme

$$Pe^x + e^{\frac{s}{r}x} + \cdots = 0.$$

Mais les coefficients $\frac{s}{r}$,... diffèrent tous de 1 et ont tous des modules ≤ 1 par hypothèse, ce qui exige que *leurs parties réelles soient toutes* < 1. Donc, pour x infini positif, le premier terme Pe^x est d'ordre supérieur à tous les autres et l'identité est impossible.

229. Cas des racines imaginaires. — Quand les racines r, s.... ne sont pas toutes réelles, l'intégrale trouvée contient des imaginaires, mais elle subsiste, car les règles de dérivation des exponentielles ne sont pas changées. On peut, par une transformation, lui restituer la forme réelle.

Nous supposons ici que $f(\mathrm{D})$ est un polynome à coefficients réels, de sorte que ses racines imaginaires sont conjuguées deux à deux. Soit $r = \alpha + \beta i$ et $s = \alpha - \beta i$ un couple de racines conjuguées de l'ordre λ de multiplicité. Les termes correspondants de la formule (**10**) peuvent s'écrire, en désignant par P et Q deux polynomes arbitraires de degré $(\lambda - 1)$.

$$\mathrm{P}e^{rx} + \mathrm{Q}e^{sx} = e^{\alpha x}(\mathrm{P}e^{\beta ix} + \mathrm{Q}e^{-\beta ix}).$$

Remplaçons $e^{\beta ix}$ par $\cos\beta x + i \sin\beta x$, $e^{-\beta ix}$ par $\cos\beta x - i\sin\beta x$; l'ensemble des termes considérés se met sous la forme

$$e^{\alpha x}[(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\cos\beta x + i(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\sin\beta x]$$

ou plus simplement,

$$(\mathbf{11}) \qquad e^{\alpha x}[\mathrm{P}_{\lambda-1}\cos\beta x + \mathrm{Q}_{\lambda-1}\sin\beta x],$$

car on peut considérer $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$ et $i(\mathrm{P}-\mathrm{Q})$ comme deux polynomes réels [1] arbitraires $\mathrm{P}_{\lambda-1}$ et $\mathrm{Q}_{\lambda-1}$ de degré $\lambda - 1$.

Les termes de l'intégrale qui correspondent aux racines conjuguées r et s s'écriront donc sous la forme (**11**) et on opérera de même pour les autres couples de racines conjuguées s'il y en a.

En particulier, si les racines conjuguées r et s sont simples, les termes correspondants de l'intégrale générale seront

$$(\mathbf{12}) \qquad e^{\alpha x}[\mathrm{C}_1\cos\beta x + \mathrm{C}_2\sin\beta x]$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{C}e^{\alpha x}\cos(\beta x + \mathrm{C}'),$$

C et C′ désignant deux nouvelles constantes liées aux premières par les relations $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}\cos\mathrm{C}'$ et $\mathrm{C}_2 = -\mathrm{C}\sin\mathrm{C}'$.

230. Exemples. — I. Les deux équations

$$(\mathrm{D}^2 + 5\mathrm{D} + 6)y = 0, \qquad (\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 1)y = 0,$$

[1] Il suffit, en effet, pour cela, que les deux polynomes P et Q soient conjugués.

ont pour caractéristiques

$$(D+2)(D+3)=0, \qquad (D-1)^2=0,$$

et pour intégrales

$$y = Ce^{-2x} + C_1 e^{-3x}, \qquad y = (C + C_1 x)e^x.$$

II. Soit l'équation

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0.$$

L'équation caractéristique $(D^2+4)^2=0$ a les racines doubles imaginaires $\pm 2i$; l'intégrale générale sera

$$y = (C + C_1 x)\cos 2x + (C_2 + C_3 x)\sin 2x.$$

III. Soit l'équation

$$(D^4 + 4a^4)y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$D^4 + 4a^4 = (D^2 + 2a^2)^2 - (2aD)^2 = 0$$

a les racines $\pm a(1 \pm i)$; l'intégrale générale sera

$$y = Ce^{ax}\cos(ax + C') + C_1 e^{-ax}\cos(ax + C'_1).$$

§ 5. Intégration des équations linéaires à coefficients constants avec second membre.

231. Intégration des équations simples. — Soit l'équation simple

$$(1) \qquad (D - r)^{\lambda} y = \varphi(x).$$

Multiplions-la par e^{-rx} et transformons-la par la formule (6) du n° 225 ; elle devient

$$D^{\lambda} \cdot e^{-rx} y = e^{-rx}\varphi(x).$$

On en tire d'abord $e^{-rx}y$ par λ quadratures consécutives, et ensuite y par la formule

$$(2) \qquad y = e^{rx}\int\int\cdots\int e^{-rx}\varphi(x)\,dx^{\lambda}\cdot$$

Cette expression est la somme d'une intégrale particulière de l'équation complète et de l'intégrale générale $P_{\lambda-1}\,e^{rx}$ de l'équation sans second membre. Pratiquement, pour calculer y, on peut effectuer les quadratures sans introduire de constante, ce qui fournit l'intégrale particulière, et ajouter ensuite l'intégrale de l'équation sans second membre.

Réduction de plusieurs quadratures successives a une seule intégrale définie. — Considérons d'abord l'équation différentielle

$$D^\lambda u = \psi(x), \tag{2}$$

d'où

$$u = \int\int\cdots\int \psi(x)\, dx^\lambda \tag{4}$$

On vérifie directement qu'*on obtient une intégrale particulière par la formule* [1]

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\ \psi(t)\, dt, \tag{5}$$

où x_0 est une constante arbitraire.

En effet, si l'on dérive d'abord $(\lambda - 1)$ fois de suite par la règle de Leibnitz complétée (n° 58), le terme provenant de la variation de la limite supérieure est nul chaque fois (la fonction sous le signe $\int$ s'annulant à cette limite), et il suffit de dériver sous ce signe, ce qui donne

$$D^{\lambda-1}u = \int_{x_0}^{x} \psi(t)\, dt.$$

Enfin, en dérivant une fois de plus, il vient $D^\lambda u = \psi(x)$.

Faisant maintenant $\psi(x) = e^{-rx}\varphi(x)$, on trouve la solution particulière

$$\int\int\cdots\int e^{-rx}\varphi(x)\, dx^\lambda = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\ e^{-rt}\varphi(t)\, dt.$$

On obtient donc une intégrale particulière de l'équation complète (1) par la formule pratique :

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\ e^{r(x-t)}\varphi(t)\, dt. \tag{6}$$

Représentation symbolique de l'intégrale. — Il sera commode de représenter l'intégrale générale de l'équation

$$(D-r)^\lambda y = \varphi(x)$$

par le symbole

$$y = \frac{\varphi(x)}{(D-r)^\lambda}$$

qu'on obtient en résolvant l'équation par rapport à y comme si $(D - r)$

[1] C'est un cas particulier de la *méthode de Cauchy* (n° 213,2°).

était une quantité. Nous allons voir l'utilité de cette convention dans le nº suivant.

232. Intégration des équations linéaires complètes à coefficients constants dans le cas général. — Comme l'intégrale de l'équation sans second membre est connue, cette intégration se ramène à des quadratures d'après un théorème général (nº 212).

Soit donc à intégrer l'équation

$$(7) \qquad f(D)\, y = \varphi(x).$$

Nous allons montrer que *le problème de réduire cette intégration à des quadratures revient à décomposer* $1 : f(D)$ *en une somme de fractions simples.*

Supposons, en effet, que l'on connaisse la décomposition de $f(D)$ en facteurs :

$$f(D) = (D-r)^{\lambda}\, (D-s)^{\mu} \ldots$$

et celle de $1 : f(D)$ en fractions simples :

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D-r} + \frac{A_2}{(D-r)^2} + \cdots \frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1}{D-s} + \cdots$$

Isolons successivement dans $f(D)$ les divers facteurs $(D-r)$, $(D-r)^2$,... $(D-s)$... L'équation à intégrer s'écrira sous les diverses formes

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{(D-r)}y\right] = \varphi, \qquad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2}y\right] = \varphi, \ldots$$

$$(D-s)\left[\frac{f(D)}{(D-s)}y\right] = \varphi, \ldots$$

Chacune de ces équations est une équation simple sans second membre quand on prend la quantité entre crochets comme inconnue. Il vient, en les intégrant et en utilisant la représentation symbolique indiquée à la fin du nº précédent,

$$\frac{f(D)}{D-r}y = \frac{\varphi}{D-r}, \quad \frac{f(D)}{(D-r)^2}y = \frac{\varphi}{(D-r)^2}, \ldots \quad \frac{f(D)}{D-s}y = \frac{\varphi}{D-s}, \ldots$$

Multiplions respectivement ces équations par les constantes $A_1, A_2, \ldots$ $B_1, \ldots$ de la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples et ajoutons, il vient, par l'identité (5) du nº 224,

$$(8) \qquad y = \frac{A_1\,\varphi}{D-r} + \frac{A_2\,\varphi}{(D-r)^2} + \cdots + \frac{A_\lambda\,\varphi}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1\,\varphi}{D-s} + \cdots$$

Cette formule s'obtient, tout simplement, en remplaçant dans la relation

$$y = \frac{1}{f(D)}\,\varphi(x)$$

$1 : f(D)$ par son développement en une somme de fractions simples et c'est la formule de réduction de l'intégrale cherchée à des intégrales d'équations simples, donc à des quadratures.

D'après notre raisonnement, toute intégrale y rentre dans la formule précédente. Mais les constantes d'intégration restent arbitraires, car en réunissant les termes qui renferment ces constantes, on forme l'intégrale générale de l'équation sans second membre (n° 228).

Pratiquement, pour obtenir l'intégrale générale y, on remplacera chaque terme de la formule (**8**) par l'intégrale particulière correspondante fournie par la formule (**6**), puis on ajoutera l'intégrale de l'équation sans second membre.

Si les racines r, s,... *ne sont pas toutes réelles*, la solution sera, en apparence, compliquée de coefficients et d'exponentielles imaginaires, mais ces imaginaires disparaîtront d'elles-mêmes par l'addition des termes conjugués, ainsi que nous l'avons vérifié pour l'équation sans second membre.

Cas particulier. — *Si toutes les racines* $f(D)$ *sont simples*, la décomposition en fractions se fait par la formule connue (*t.* 1er, n° 140) et la formule d'intégration devient

$$y = \frac{\varphi(x)}{f(D)} = \frac{1}{f'(r)}\,\frac{\varphi}{D - r} + \frac{1}{f'(s)}\,\frac{\varphi}{D - s} + \cdots$$

Remplaçons chaque terme de cette formule par l'intégrale particulière (**6**) du n° 231 et ajoutons l'intégrale générale Y de l'équation sans second membre, nous obtenons l'intégrale

$$(\mathbf{9}) \qquad y = Y + \int_{x_0}^{x}\left[\frac{e^{r(x-t)}}{f'(r)} + \frac{e^{s(x-t)}}{f'(s)} + \cdots\right]\varphi(t)\,dt.$$

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$(D^2 + a^2)\,y = (D + ai)\,(D - ai)\,y = \varphi(x).$$

Les racines sont $r = ai$, $s = -ai$ et l'on a $f'(D) = 2D$; faisons $x_0 = 0$ dans la formule (**9**), elle nous donne

$$y = Y + \int_0^x \frac{e^{ai(x-t)} - e^{-ai(x-t)}}{2ai}\,\varphi(t)\,dt.$$

Remplaçons encore Y par sa valeur, nous obtenons l'intégrale

$$y = \mathrm{A} \cos ax + \mathrm{B} \sin ax + \frac{1}{a}\int_0^x \varphi(t) \sin a(x - t)\, dt.$$

233. Intégration de l'équation complète par la détermination directe d'une intégrale particulière. — Quand on trouve facilement une intégrale particulière de l'équation complète

$$f(\mathrm{D})\, y = \varphi(x),$$

l'intégrale générale s'obtient le plus facilement en ajoutant à celle-là l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Nous allons examiner les principales formes de $\varphi(x)$ pour lesquelles on trouve directement une intégrale particulière.

Premier cas : $\varphi(x)$ *est un polynome* P_k *de degré* k. L'équation est donc de la forme

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{P}_k\,.$$

Si $f(\mathrm{D})$ *n'a pas de racine nulle, l'équation admet comme solution particulière un polynome déterminé de degré* k *; si* $f(\mathrm{D})$ *a* λ *racines nulles, l'équation admet une solution particulière de la forme* $x^{\lambda}\mathrm{Q}_k$ *où* Q_k *est encore un polynome déterminé de degré* k.

Ces polynomes peuvent s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés, ou par le procédé suivant, qui nous servira de démonstration.

En premier lieu, si $f(\mathrm{D})$ n'a pas de racine nulle, on peut développer $1 : f(\mathrm{D})$ suivant les puissances de D par la formule de Maclaurin. Arrêtons nous après le terme d'ordre k ; nous aurons, M désignant un polynome (*t.* 1er, n° 120),

$$\frac{1}{f(\mathrm{D})} = b_0 + b_1 \mathrm{D} + \cdots + b_k \mathrm{D}^k + \mathrm{D}^{k+1}\frac{\mathrm{M}}{f(\mathrm{D})}\,,$$

d'où

$$1 = f(\mathrm{D})\,(b_0 + b_1 \mathrm{D} + \cdots + b_k \mathrm{D}^k) + \mathrm{M}\mathrm{D}^{k+1}.$$

Le second membre définit donc une opération d'effet nul ; effectuons-la sur P_k, en observant que $\mathrm{D}^{k+1}\mathrm{P}_k = 0$; il vient

$$f(\mathrm{D})[(b_0 + b_1\mathrm{D} + \cdots + b^k)\mathrm{P}_k] = \mathrm{P}_k\,.$$

Donc, *si* $f(\mathrm{D})$ *n'a pas de racine nulle, on obtient une solution particulière en faisant la somme des termes de degrés* $\leqslant k$ *dans le développe-*

ment de 1 : $f(\mathrm{D})$ *suivant les puissances de* D, *et en effectuant sur* P_k *l'opération représentée par cette somme. Le résultat sera un polynome de degré* k.

En second lieu, si $f(\mathrm{D})$ a λ racines nulles, observons que l'on a $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^\lambda f_1(\mathrm{D})$, mettons l'équation sous la forme

$$f_1(\mathrm{D})[\mathrm{D}^\lambda y] = \mathrm{P}_k$$

et prenons $\mathrm{D}^\lambda y$ pour inconnue : nous sommes ramenés au cas précédent. Donc $\mathrm{D}^\lambda y$ est un polynome de degré k, qui peut se calculer à l'aide du développement de 1 : $f_1(\mathrm{D})$ par la formule de Maclaurin. Connaissant $\mathrm{D}^\lambda y$, tirons-en une solution y par λ quadratures sans introduire de constante : cette solution sera de la forme $x^\lambda \mathrm{Q}_k$.

Chaque fois que l'on connaît ou que l'on obtient facilement le développement de Maclaurin sur lequel repose le calcul précédent, cette méthode est la plus commode en pratique et, dans les cas simples, elle permet même d'écrire à première vue une solution de l'équation, Mais, si le développement en question ne s'obtient que par des calculs minutieux, il sera généralement plus expéditif d'employer la méthode des coefficients indéterminés. On substituera dans l'équation une expression de la forme indiquée en laissant indéterminés les coefficients du polynome Q_k. En identifiant les deux membres, on obtiendra un système d'équations linéaires déterminant tous les coefficients inconnus, car, comme aucun terme de la solution particulière cherchée n'entre dans l'intégrale de l'équation sans second membre, aucun des coefficients ne peut rester arbitraire.

Deuxième cas. *Si* $\varphi(x)$ *est le produit d'un polynome par une exponentielle*, l'équation est de la forme

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{P}_k e^{ax},$$

Ce cas se ramène au précédent par la substitution

$$y = e^{ax} z.$$

En effet, si l'on remplace r par $-a$ dans la formule (6) du nº 225, on en tire

$$\mathrm{D}^\lambda e^{ax} z = e^{ax} (\mathrm{D} + a)^\lambda z.$$

Si l'on applique cette formule pour chaque terme de $f(\mathrm{D})$, on en déduit la formule générale

$$(10) \qquad f(\mathrm{D})\, e^{ax} z = e^{ax} f(\mathrm{D} + a)\, z.$$

Donc, après suppression du facteur commun $e^{\alpha x}$, l'équation transformée sera

$$f(\mathrm{D}+a)z=\mathrm{P}_k\,.$$

Connaissant une solution particulière z, on en déduit une solution particulière y.

Troisième cas. *Si $\varphi(x)$ est une somme de termes des types précédents*, donc si l'équation est de la forme

$$f(\mathrm{D})y=\mathrm{P}_k+\mathrm{Q}_l e^{ax}+\cdots,$$

on cherchera séparément des intégrales $u, v,\ldots$ des diverses équations

$$f(\mathrm{D})u=\mathrm{P}_k\,,\qquad f(\mathrm{D})v=\mathrm{Q}_l\,e^{ax},\ldots$$

et, en faisant leur somme $u+v+\cdots$, on aura une intégrale particulière de la proposée. On le constate par l'addition des équations précédentes,

Quatrième cas. *Si l'équation est de l'une des formes suivantes* :

$$f(\mathrm{D})y=\mathrm{P}_k\,e^{ax}\cos bx,\qquad f(\mathrm{D})z=\mathrm{P}_k\,e^{ax}\sin bx,$$

on peut la ramener aux types précédents en remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires ; mais, si les données sont réelles, on obtiendra plus facilement une intégrale en prenant respectivement pour y et pour z la partie réelle et le coefficient de i dans une solution u de l'équation

$$f(\mathrm{D})u=\mathrm{P}_k\,e^{(a+bi)x}$$

car cette équation se décompose dans les deux précédentes en posant $u=y+zi$.

234. Exemples. — Soient à intégrer les deux équations

$$(\mathrm{D}^2+1)y=\cos x,\qquad (\mathrm{D}^2+1)z=\sin x.$$

Nous intégrons d'abord $(\mathrm{D}^2+1)u=e^{ix}$. Substituant $u=te^{ix}$, il vient

$$[(\mathrm{D}+i)^2+1]t=1,\qquad \text{d'où}\qquad (\mathrm{D}+2i)\mathrm{D}t=1.$$

Le terme de degré 0 dans $1:(\mathrm{D}+2i)$ est $1:2i$; on a donc

$$\mathrm{D}t=\frac{1}{2i}\,,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{x}{2i}\,,\qquad u=\frac{xe^{ix}}{2i}$$

Les intégrales particulières cherchées y et z seront

$$y=\frac{x\sin x}{2}\,,\qquad z=-\frac{x\cos x}{2}\,.$$

235. Equations d'Euler réductibles à celles à coefficients constants. — Elles sont de la forme

$$(11)\qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = \varphi(x),$$

et elles se ramènent aux coefficients constants en changeant de variable indépendante par la substitution

$$x = e^t, \qquad dx = e^t dt.$$

En effet, soit D le signe de dérivation par rapport à t ; ayons égard à la formule $\mathrm{D}.e^{ax}u = e^{ax}(\mathrm{D} + a)u$; il vient, de proche en proche,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\mathrm{D}y, \ \frac{dy}{dx} = e^{-t}\mathrm{D}(e^{-t}\mathrm{D}y) = e^{-2t}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\,y, \ldots$$

c'est-à-dire

$$x\frac{dy}{dx} = \mathrm{D}y, \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\,y, \ \ldots$$

et, en général,

$$x^p \frac{d^p y}{dx^p} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)\cdots(\mathrm{D}-p+1)y.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (**11**), elle se transforme en une autre à coefficients constants, que l'on peut écrire immédiatement.

Remarque. — Si l'on considérait l'équation plus générale

$$(px+q)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (px+q)^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = \varphi(x),$$

on la ramènerait à la précédente en prenant $px + q$ comme variable indépendante.

Exercices.

1. Intégrer les équations suivantes (méthode du n° 233) :

$$(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + 1)\,y = \sin 2x$$
$$(\mathrm{D}^4 + 2\mathrm{D}^2 + 1)\,y = x^2 \cos ax$$
$$(\mathrm{D}^2 + 4)\,y = x \sin^2 x$$
$$(\mathrm{D}+1)^3 y = e^{-x} + x^2.$$
$$(\mathrm{D}+c)^n\,y = \cos ax.$$

2. Réduire à des quadratures les équations précédentes, après y avoir remplacé le second membre par une fonction quelconque $\varphi(x)$. Etudier, en particulier, les cas où $\varphi(x) = x^{-1}$, tg x, etc.

§ 6. Intégration par les séries de certaines équations linéaires du second ordre. Equations de Bessel et de Riccati.

236. Fonction et équation de Bessel. — Soit n un nombre quelconque (non entier, s'il est négatif). Nous définirons la *fonction* I_n *de Bessel* par la série potentielle, convergente pour toutes les valeurs de x,

$$(1) \qquad I_n = \sum_0^\infty a_p x^p \qquad \text{où} \qquad a_p = \frac{1}{p\,!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}$$

et nous conviendrons que, si $p = 0$, on a $0\,! = 1$, $a_0 = 1$.

Cette fonction vérifie une équation différentielle que nous allons former. On a

$$\frac{d}{dx} \cdot x^n I_n = \Sigma (n+p) a_p x^{n+p-1}$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx} x^n I_n = \Sigma p(n+p)\, a_p x^{p-1} = \Sigma a_{p-1} x^{p-1} = I_n .$$

C'est l'équation cherchée, qui peut s'écrire, tous calculs faits,

$$x \frac{d^2 I_n}{dx^2} + (1+n) \frac{dI_n}{dx} - I_n = 0.$$

Donc I_n est une intégrale particulière de l'équation

$$(2) \qquad x \frac{d^2y}{dx^2} + (1+n) \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

que nous appellerons *équation de Bessel* [1].

237. Théorème. — *L'équation de Bessel ne change pas de forme par la substitution*

$$y = \frac{z}{x^n},$$

seulement n change de signe dans cette équation.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n} \frac{dz}{dx} - \frac{nz}{x^{n+1}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^n} \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{2n}{x^{n+1}} \frac{dz}{dx} + \frac{n(n+1)z}{x^{n+2}}$$

et, par la substitution de ces valeurs, l'équation de Bessel devient

$$(3) \qquad x \frac{d^2z}{dx^2} + (1-n) \frac{dz}{dx} - z = 0.$$

[1] On prend souvent aussi comme forme canonique de l'équation de Bessel les équations (11) du nº 242 ou encore d'autres transformées que nous ne rencontrerons pas ici.

REMARQUES. — I. Si x est négatif, la substitution précédente peut être imaginaire, mais la substitution

$$y = \frac{z}{(-x)^n}$$

sera réelle et conduira à la même équation (3), car la nouvelle valeur de z ne diffère de la précédente que par un facteur constant. On peut donc toujours éviter l'introduction des imaginaires.

II. Il résulte du théorème précédent que, dans l'étude de l'équation de Bessel, il sera toujours permis de supposer n nul ou positif, car, si n était négatif, on le rendrait positif par la substitution précédente.

238. Intégration de l'équation de Bessel quand n n'est pas un nombre entier. — Dans ce cas, *l'intégrale générale s'exprime par les fonctions de Bessel.*

En effet, I_n est une première intégrale particulière de l'équation (2) ; I_{-n} est une intégrale particulière de l'équation (3), donc $I_{-n} : x^n$ est une seconde intégrale particulière de l'équation (2) et elle est évidemment indépendante de la première, parce qu'elle renferme des puissances fractionnaires. L'intégrale générale de l'équation (2) sera donc

$$y = CI_n + C_1 \frac{I_{-n}}{x^n} \cdot \tag{4}$$

Si x était négatif et qu'on voulût éviter l'introduction des imaginaires, on remplacerait au besoin le dénominateur x^n par $(-x)^n$.

Remarque. — Si n est entier, une des deux séries I_n ou I_{-n} cesse d'exister, car tous ses coefficients deviennent infinis à partir d'un certain rang. Mais il y a toujours une des deux séries et, par conséquent, une des deux intégrales particulières qui subsiste. Dans ce cas, l'intégration se ramène aux quadratures par les théorèmes généraux (n° 215).

Supposons que n soit positif ; c'est alors l'intégrale particulière I_n qui subsiste, et la formule d'intégration sera (n° 215, formule 8)

$$y = CI_n + C_1 I_n \int \frac{dx}{x^{n+1} I_n^2}$$

Mais cette intégrale peut encore s'exprimer par des séries potentielles, moins simples toutefois que celles de Bessel. Nous allons les faire connaître.

239. Nouvelles séries liées à celle de Bessel. — En dérivant I_n par rapport à n, on forme une nouvelle série potentielle, convergente pour

toutes les valeurs de x et à coefficients rationnels. Nous la désignerons par I'_n et l'on aura, a_p étant défini par la formule (1),

$$(5) \qquad I'_n = \sum^{\infty} a'_p x^p, \qquad a'_p = -a_p \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{\lambda}.$$

Considérons, d'autre part, la série potentielle, dépendant de deux paramètres ε et u,

$$\varphi(x, n, \varepsilon) = 1 + \frac{x}{(n+1)(\varepsilon+1)} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \cdots$$

laquelle se réduit à I_n pour $\varepsilon = 0$.

Celle-ci peut être dérivée par rapport à ε et l'on trouve, pour $\varepsilon = 0$, la série potentielle à coefficients rationnels

$$(6) \qquad \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) = \sum_1^{\infty} b_p x^p, \qquad b_p = -a_p \sum_1^{p} \frac{1}{\lambda}.$$

Nous allons montrer que, quand n est entier, l'intégration de l'équation de Bessel se fait au moyen des séries (1), (5) et (6).

240. Intégration de l'équation de Bessel quand n est nul. — Dans ce cas, les deux séries I_n et I_{-n} se confondent. Nous avons toujours une intégrale particulière I_0. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

A cet effet, considérons d'abord l'équation dans laquelle n est une quantité positive infiniment petite ε. Nous avons les deux intégrales distinctes I_ε et $I_{-\varepsilon} : x^\varepsilon$. Mais nous pouvons remplacer la seconde par la combinaison linéaire

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[I_\varepsilon - \frac{I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon}\right] = \frac{x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon \,.\, \varepsilon}.$$

Quand ε tend vers 0, celle-ci a une limite finie Y_0, qui s'obtient par la règle de l'Hospital :

$$(7) \qquad Y_0 = \lim_{\varepsilon=0} D_\varepsilon \left[x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}\right] = I_0 \operatorname{Log} x + 2 I'_0.$$

Cette nouvelle intégrale Y_0 s'exprime donc au moyen de la fonction de Bessel I_0 et de la série (5) I'_0. Elle est évidemment distincte de I_0 puisqu'elle renferme un logarithme. L'intégrale générale sera

$$y = CI_0 + C_1 Y_0.$$

Remarque. — On a admis, dans cette démonstration, que la limite d'une intégrale de l'équation de Bessel où n tend vers 0, est une intégrale de cette équation pour $n = 0$. Ce postulat est une conséquence de la proposition I du nº 175 généralisée. Nous ferons usage, dans le nº suivant, d'un postulat analogue, fondé sur la même proposition.

241. Intégration de l'équation de Bessel quand n est entier et > 0. Si n est un entier différent de 0, on peut le supposer positif (nº 237). Dans ce cas, la série I_{-n} cesse d'exister, mais l'intégrale particulière I_n subsiste toujours. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

Remplaçons d'abord n par $n - \varepsilon$ (ε étant infiniment petit). Les n premiers termes de $I_{-n+\varepsilon}$ ne renferment pas le facteur ε au dénominateur et seront, par conséquent, finis : nous désignerons leur somme par N_ε. Tous les termes suivants, au contraire, sont infinis et ils renferment un facteur commun indépendant de x, que nous désignerons par $A_\varepsilon : \varepsilon$, en posant

$$A_\varepsilon = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,!\,(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\cdots(n-1-\varepsilon)}$$

Considérons donc le produit $\varepsilon I_{\varepsilon-n}$; il peut, eu égard à la définition (nº 239) de $\varphi(x, n, \varepsilon)$, se mettre sous la forme suivante

$$(8) \qquad \varepsilon I_{\varepsilon-1} = \varepsilon N_\varepsilon + x^n A_\varepsilon \varphi(x, n, \varepsilon).$$

Donc, ε tendant vers 0, on a, à la limite, φ tendant alors vers I_n,

$$(9) \qquad [\varepsilon I_{\varepsilon-n}]_0 = x^n A_0 I_n, \qquad A_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{n\,!\,(n-1)\,!}\cdot$$

Tant que ε n'est pas nul, $I_{n-\varepsilon}$ et $\varepsilon I_{\varepsilon-n} : x^{n-\varepsilon}$ sont deux intégrales indépendantes de l'équation de Bessel, mais elles cessent d'être distinctes pour $\varepsilon = 0$, en vertu de l'équation (9). Pour en obtenir une nouvelle, considérons la combinaison linéaire (qui est aussi une intégrale)

$$\frac{\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}}{\varepsilon x^{n-\varepsilon}}$$

et cherchons-en la limite pour $\varepsilon = 0$. C'est une expression de la forme $0 : 0$; en vertu de la règle de l'Hospital, ce sera la valeur pour $\varepsilon = 0$ de

$$\frac{1}{x^n} D_\varepsilon[\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n-\varepsilon} I_{n-\varepsilon}]$$

Mais, pour $\varepsilon = 0$, il vient, par la formule (8),

$$D_\varepsilon(\varepsilon I_{\varepsilon-n}) = N_0 + x^n A_0 \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + x^n A'_0 I_n,$$

de sorte que la limite cherchée a pour expression

$$\frac{N_0}{x^n} + A_0[\varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x] + A'_0 I_n.$$

Supprimant le dernier terme qui n'est pas distinct de I_n, nous formons notre seconde intégrale particulière Y_n, savoir

$$(10) \qquad Y_n = \frac{N_0}{x^n} + A_0[\varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x].$$

Celle-ci s'exprime donc au moyen des trois séries potentielles I_n, I'_n et $\varphi'_\varepsilon(x, n, 0)$; la première est la fonction de Bessel et les deux autres sont définies par les formules (5) et (8). Le coefficient A_0 est une constante (9) et enfin, par définition de N_ε, N_0 comprend les n premiers termes de I_{-n}, de sorte que

$$\frac{N_0}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{c_1}{x_{n-1}} + \cdots + \frac{c^{n-1}}{x}, \quad c_p = \frac{(-1)^p}{p\,!\,(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}$$

L'intégrale générale de l'équation de Bessel sera donc, dans ce cas-ci,

$$y = C\,I_n + C_1 Y_n\,.$$

242. Transformées de l'équation de Bessel. Equation de Riccati. — Changeons de variable indépendante par la relation $x = \varphi(t)$. En accentuant les dérivées par rapport à t, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3};$$

l'équation de Bessel

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1+n)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

devient ainsi, après multiplication par x',

$$\frac{x}{x'}y'' + \left(1 + n - \frac{x}{x'}\frac{x''}{x'}\right)y' - x'y = 0.$$

Voici quelques cas particuliers de cette tranformation générale :

1°) Quel que soit le signe de x, on peut toujours faire, sans introduire d'imaginaires, une des deux substitutions

$$x = \pm\frac{t^2}{4}, \quad \text{d'où} \quad x' = \pm\frac{t}{2}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{t}{2}, \quad \frac{x''}{x'} = \frac{1}{t}.$$

L'équation transformée sera

$$(11) \qquad y'' + \frac{2n+1}{t}y' \mp y = 0.$$

2°) Plus généralement, faisons la substitution

$$x = \alpha t^\beta \quad \text{d'où} \quad x' = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad \frac{x''}{x'} = \frac{\beta-1}{t}.$$

L'équation transformée sera

$$t^2y'' + (\beta n - 1)\,ty' - \alpha\beta^2 t^\beta y = 0.$$

On peut disposer des trois constantes α, β et n de manière à identifier cette équation avec toute équation de la forme

$$t^2y'' + aty' + bt^m y = 0.$$

pourvu toutefois que b et m soient différents de 0, car la substitution suppose α et β différents de 0. Mais, si $m = 0$ ou si $b = 0$, cette dernière équation est une équation d'Euler (n° 235).

Les équations de cette dernière forme sont fréquentes dans les applications. Elles s'intégreront donc par les formules des n°s précédents, en remplaçant x par une expression convenable de la forme αt^β.

3°) *La transformée d'Euler de l'équation* (particulière) *de Riccati* (n° 187) s'obtient comme cas particulier de la transformation précédente.

Si l'on fait $n = 1 : \beta$ et qu'on change α en $\alpha : \beta^2$, on voit que l'équation de Bessel se ramène à

$$t^2y'' - \alpha t^\beta y = 0, \qquad \text{par la substitution} \qquad x = \frac{\alpha t^\beta}{\beta^2}.$$

Faisons $\beta = m + 2$. On voit que l'*équation de Bessel* où $n = \dfrac{1}{m+2}$ se ramène à l'*équation transformée de Riccati* (n° 187) :

$$(12) \qquad y'' - \alpha t^m y = 0, \qquad \text{par la substitution} \qquad x = \frac{\alpha t^{m+2}}{(m+2)}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Si $m+2$ n'est pas l'inverse d'un entier, l'équation (**12**) s'intègre par les transcendantes I_n et I_{-n} en faisant $n = 1 : (m+2)$ et en remplaçant x par la fonction de t qui précède.

Si $m+2$ est l'inverse d'un nombre entier, l'intégration exigera l'intervention des séries plus compliquées du n° 239.

Si $m + 2 = 0$, l'équation (**12**) se réduit à une équation d'Euler (n° 235) et s'intègre sans difficulté.

On verra, au n° suivant, que, quand $m : (m+2)$ est un nombre pair, l'équation (**12**) s'intègre sous forme finie.

243. Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie (1). — *L'équation de Bessel s'intègre sous forme finie si $n + \frac{1}{2}$ est un nombre entier (positif, nul ou négatif).*

Supposons, ce qui est permis, *n positif* (n° 237). Si $n + \frac{1}{2}$ est entier, c'est un entier positif p. Alors, par l'une des substitutions $x = \pm \dfrac{t^2}{4}$, l'équation de Bessel se ramène à l'une des deux équations (**11**)

$$(13) \qquad y'' + \frac{2p}{t} y' \pm y = 0.$$

Il faut donc montrer que *cette équation s'intègre sous forme finie quand p est un entier positif.*

(1) J'ai exposé cette méthode de calcul dans les *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1905.

A cet effet, observons que, t étant traité comme un paramètre, on a, par une intégration par parties,

$$\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^{p-1}\, u\, du = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^p\, du.$$

Nous allons tirer de cette relation la solution de l'équation de Bessel, en transformant les deux intégrales indéfinies qui y figurent par la formule symbolique du premier volume (nº 218), que voici

$$\int e^{tu}\mathrm{E}(u)\, du = \mathrm{E}(\mathrm{D}_t)\frac{e^{tu}}{t} + \mathrm{C}\,,$$

et dans laquelle $\mathrm{E}(u)$ est un polynome. Cette formule s'applique aux deux intégrales susdites si p est entier positif, car $u(u^2 \pm 1)^{p-1}$ et $(u^2 \pm 1)^p$ sont des polynomes. Désignant par D les dérivées par rapport à t, il vient ainsi, à une constante près par rapport à u,

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t} = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^p\frac{e^{tu}}{t}\,\cdot$$

Mais cette constante est nulle, car, si l'on suppose t positif, les deux membres de cette relation s'annulent par $u = -\infty$. Donc cette relation est une identité. Elle subsiste pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t et de u, car les dérivées des exponentielles se calculent toujours par les mêmes règles.

Multiplions l'identité précédente par $2p : t$ et posons, dans les deux membres,

$$(14) \qquad y = (\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t}\,;$$

elle prend la forme

$$(\mathrm{D}^2 \pm 1)y + \frac{2p}{t}\mathrm{D}y = \frac{e^{tu}}{t}(u^2 \pm 1)^p.$$

Le premier membre est précisément celui de l'équation (**13**). Donc, comme p est > 0, il suffit de choisir u de manière à annuler $u^2 \pm 1$ pour obtenir par la formule (**14**) une solution de l'équation (**13**). Examinons ces solutions pour chacune des déterminations du signe ambigu.

Premier cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

Il faut alors annuler $u^2 - 1$, ce qui donne pour u deux valeurs $+1$ et -1, auxquelles correspondent deux solutions indépendantes :

$$(\mathrm{D}^2 - 1)^{p-1}\frac{e^t}{t}\,, \qquad (\mathrm{D}^2 - 1)^{p-1}\frac{e^{-t}}{t}$$

ou, en faisant usage de la formule (**10**) du n° 233

$$e^{t}(D+2)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}, \qquad e^{-t}(D-2)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}$$

Supprimant un facteur constant dans chacune de ces expressions, on obtient les deux intégrales particulières pratiques :

$$y_1 = e^{t}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}, \qquad y_2 = e^{-t}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}$$

qui s'explicitent entièrement avec la plus grande simplicité. L'intégrale générale sera $y = Cy_1 + C_1y_2$.

Deuxième cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2p}{t}\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Il faut alors annuler u^2+1. Faisant $u=i$, on obtient la solution complexe

$$y=(D^2+1)^{p-1}\frac{e^{it}}{t},$$

qui se décompose elle-même en deux solutions réelles distinctes :

$$y_1=(D^2+1)^{p-1}\frac{\cos t}{t}, \qquad y_2=(D^2+1)^{p-1}\frac{\sin t}{t},$$

qui peuvent servir à former l'intégrale générale.

Mais, si l'on veut effectuer tous les calculs, il sera plus simple de procéder comme dans le premier cas. Mettant l'intégrale complexe sous la forme

$$y=e^{it}(D+2i)^{p-1}D^{p-1}\frac{1}{t}$$

et supprimant un facteur constant, on a une nouvelle intégrale complexe

$$y=e^{it}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}.$$

Celle-ci s'exprime immédiatement sous forme explicite et l'on obtient deux intégrales réelles indépendantes en séparant le réel et l'imaginaire. Nous ne les écrirons pas. Si l'on ne se préoccupait pas d'obtenir une intégrale de forme réelle, on obtiendrait immédiatement une seconde intégrale complexe, indépendante de la précédente, en remplaçant dans celle-ci i par $-i$.

Cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati. — L'équation

$y'' - \alpha t^m y = 0$ se ramène (nº 242) à celle de Bessel où $n = 1 : (m+2)$. Pour que $n + \frac{1}{2}$ soit entier, il faut ainsi que

$$\frac{1}{m+2} + \frac{1}{2} \text{ soit entier} \left(\text{ou } \frac{m}{m+2} \text{ pair}\right).$$

Donc, pour que cette équation, qui est la transformée d'Euler de l'équation de Riccati, puisse se ramener aux équations que nous venons d'intégrer, il faut que $m : (m+2)$ soit un nombre pair. La condition d'intégrabilité sous forme finie de l'équation particulière de Riccati non transformée (nº 187),

$$y' + ay^2 = bx^m,$$

sera la même.

§ 7. Intégration ou réduction d'équations différentielles par des procédés particuliers.

244. Equations où manque y. — Quand la fonction inconnue y manque dans une équation, *on abaisse d'une unité l'ordre de cette équation* en posant $p = \frac{dy}{dx}$ et en prenant p comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation proposée

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

se ramène ainsi à la suivante

$$(2) \qquad f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

On intègre l'équation (2), ce qui conduit à une relation

$$(3) \qquad \text{F}(p, x) = 0.$$

Le calcul peut alors s'achever de deux manières :

1º On résout l'équation (3) par rapport à p, ce qui donne $p = \varphi(x)$ et l'intégrale générale y de l'équation (1) s'en déduit par une quadrature :

$$y = \int p\,dx = \int \varphi(x)\,dx.$$

2º S'il est plus facile de résoudre l'équation (3) par rapport à x, on en tire $x = \psi(p)$. Alors on cherche aussi la valeur de y en fonction de p et il vient, par une quadrature,

$$y = \int p\,dx = \int p\,\psi'(p)\,dp = p\,\psi(p) - \int \psi(p)\,dp.$$

On connaît donc x et y en fonction de p : c'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale. Il suffirait d'éliminer p pour revenir au mode de représentation habituel.

Exemple. L'équation (où X et X_1 dépendent de x seul)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} = X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

se ramène à une équation de Bernoulli (nº 186)

$$\frac{dp}{dx} + Xp = X_1p^2.$$

Donc p, puis y s'obtiennent par des quadratures en fonction de x.

Plus généralement, *si y et ses $k - 1$ premières dérivées manquent dans l'équation, l'ordre s'abaissera de k unités* en posant $\frac{d^ky}{dx^k} = u$ et en prenant u comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation d'ordre n sera ramenée à celle d'ordre $n - k$

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

L'intégrale de celle-ci sera de la forme

$$F(u, x) = 0. \tag{4}$$

Comme ci-dessus, le calcul peut s'achever de deux manières :

1º On résout l'équation (4) par rapport à u, ce qui donne $u = \varphi(x)$ et l'intégrale générale y s'en déduit par k quadratures :

$$y = \int\int\cdots\int \varphi(x)\,dx^k. \tag{5}$$

2º On résout l'équation (4) par rapport à x, d'où $x = \psi(u)$ et l'on obtient y en fonction de u par k quadratures :

$$y = \int\int\cdots\int u\,dx^k = \int\int\cdots\int u\left[\psi'(u)\,du\right]^k, \tag{6}$$

le facteur $\psi'(u)\,du$ s'introduisant *une fois* à chaque intégration.

On a ainsi une *représentation paramétrique* de l'intégrale.

Les quadratures consécutives de la formule (5) peuvent se ramener à une seule intégration par la formule (5) du nº 231. La formule (5) ci-dessus sera remplacée par

$$y = P_{k-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(t)\,dt$$

où P_{k-1} est un polynome en x arbitraire et de degré $< k$.

Exemples. Les équations suivantes s'intègrent sous forme finie :

$$(1-x^2)y''-xy'=2, \qquad 1+y'^2+xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}.$$

On pose $y'=p$. La première équation est linéaire en p ; la seconde devient différentielle exacte (nº 188) en la divisant par $\sqrt{1+p^2}$.

245. Cas particulier. Equations qui ne contiennent que deux dérivées consécutives. — *Elles s'intègrent par des quadratures.*

En effet, elles sont de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right);$$

donc, par la substitution $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u$, elles se ramènent à une équation du premier ordre et à variables séparées

$$\frac{du}{dx} = f(u), \qquad \text{d'où} \qquad x = \int \frac{du}{f(u)} = \psi(u).$$

La valeur de y s'en déduit par $n-1$ quadratures par l'une des deux méthodes 1º ou 2º du nº précédent. La méthode 2º se présente la première, puisque l'on connaît déjà la relation $x=\psi(u)$, et la valeur de y en fonction de u est immédiatement donnée par la formule (6). Pour employer la méthode 1º, il faut commencer par tirer $u=\varphi(x)$ de la relation $x=\psi(u)$ et alors y est donné en fonction de x par la formule (5).

Exemples. — Voici quelques équations pour lesquelles les quadratures se font aisément sous forme finie :

$$ay''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}, \quad ay''=\sqrt{1+y'^2}, \quad y^{\mathrm{IV}}=\sqrt{y'''}, \quad ay''=y'(1+y'^2).$$

Les deux équations de gauche sont celles d'un cercle et d'une chaînette.

246. Equations où manque x. — Quand la variable indépendante x manque, l'équation est de la forme

$$(7) \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Son ordre peut être abaissé d'une unité.

En effet, ce cas se ramène à celui où c'est la fonction qui manque (nº 244) en considérant x comme fonction de y. Mais il faut, pour cela, remplacer les dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au

moyen des dérivées de x par rapport à y. Celles-ci étant désignées par des accents, les formules (2) du n° 183 du 1r volume donnent, comme cas particulier, en y faisant $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots$$

On substituera ces valeurs dans l'équation proposée et l'ordre s'abaissera d'une unité en prenant x' pour inconnue.

Mais, en pratique, on ne fait guère cette tranformation. On prend plutôt $p = \frac{dy}{dx}$ comme nouvelle inconnue et on la considère comme fonction de y. On obtient une équation d'ordre moins élevé d'une unité entre y et p, car les dérivées de y par rapport à x s'expriment au moyen de dérivées d'ordre moindre d'une unité de p par rapport à y. Les formules de transformation sont

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right), \ldots$$

Donc l'équation proposée, qui est d'ordre n, se ramènera à une équation d'ordre $n - 1$ entre y et p. Soit

$$(8) \qquad f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

cette équation. Supposons qu'on sache l'intégrer, son intégrale sera

$$(9) \qquad F(y, p) = 0.$$

Le calcul peut alors s'achever de deux manières :

1°) On résout l'équation (9) par rapport à p, d'où $p = \varphi(y)$ et la valeur de x s'obtient par une quadrature :

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation proposée.

2°) S'il est plus facile de résoudre l'équation (9) par rapport à y, on en tire $y = \psi(p)$, ensuite x s'obtient aussi en fonction de p par une quadrature :

$$x = \int \frac{dp}{p} = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p} = \frac{\psi(p)}{p} + \int \frac{\psi(p)\,dp}{p^2}.$$

Donc x et y sont exprimés en fonction de p : c'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale.

Soit, par exemple, l'équation importante

$$(10) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Il vient, par la transformation précédente,

$$p\frac{dp}{dy} = f(y) \quad \text{d'où} \quad p^2 = 2\int f(y)\,dy, \qquad x = \int \left[2\int f(y)\,dy\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation (**10**), qui dépend, comme on le voit, de deux quadratures.

Exemples. Les deux équations :

$$y'' + Yy'^2 = Yy', \qquad y'' + Yy'^2 = Y_1,$$

dans lesquelles Y et Y_1 dépendent de y seul, se ramènent respectivement à une équation linéaire en p, ou linéaire en p^2 :

$$\frac{dp}{dy} + Yp = Y_1, \qquad \frac{d.p^2}{dy} + 2Yp^2 = 2Y_1.$$

Donc p, puis x s'obtiennent par des quadratures en fonction de y.

Pour les deux équations suivantes du dernier type ces quadratures se font sous forme finie :

$$2(2a - y)\,y'' = 1 + y'^2$$
$$yy'' - y'^2 = y^2 \operatorname{Log} y.$$

La première se ramène à une équation à variables séparées

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{2a - y}.$$

Mais il est plus simple d'intégrer la seconde en la mettant sous la forme $(D^2 - 1)\operatorname{Log} y = 0$, d'où $\operatorname{Log} y = Ce^x + C_1e^{-x}$.

247. Equations qui ne contiennent que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités. — *Elles s'intègrent par des quadratures.* C'est un nouveau cas particulier de la méthode du nº 244. L'équation.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

se ramène, en posant $\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u$, à celle

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u),$$

intégrée au nº précédent, et qui a pour intégrale

$$x = \int \left[2\int f(u)\,du\right]^{-\frac{1}{2}} du = \psi(u).$$

On en déduit la valeur de y par $n-2$ nouvelles quadratures en employant l'une des deux méthodes 1° ou 2° du n° 244. On a immédiatement y en fonction de u par la formule (6) (méthode 2°). Pour obtenir y en fonction de x par la formule (5) (méthode 1°), il faudra préalablement tirer $u=\varphi(x)$ de l'équation $x=\psi(u)$ ci-dessus.

Exemples. — On peut intégrer par cette méthode (ou par celle du n° 235) les deux équations suivantes, les quadratures se faisant sous forme finie,

$$x^2y''' = \lambda y' \qquad x^2y^{\text{IV}} = \lambda y''$$

248. Équations différentielles exactes. — Considérons l'équation

$$f(x, y, y', \dots y^n) = 0.$$

Si l'on reconnaît dans son premier membre la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \dots y^{n-1})$ quel que soit y, on dit que l'équation est *différentielle exacte* et on peut en écrire immédiatemment une intégrale première

$$F(x, y, y', \dots y^{n-1}) = C.$$

On trouvera ci-dessous la règle à suivre pour reconnaître si l'équation est différentielle exacte et pour obtenir la fonction F quand elle existe, mais cette règle est d'une application assez limitée en pratique.

Dans certains cas simples, on peut rendre l'équation différentielle exacte en la multipliant par un facteur facile à apercevoir et l'on peut abaisser l'ordre de l'équation d'une unité. Il n'y a pas de règle générale à donner, car cette méthode dépend de la perspicacité de l'opérateur, mais en voici un exemple :

Considérons l'équation, résolue (autrement) par Liouville,

$$y'' + Xy' = Yy'^2,$$

dans laquelle X dépend de x seul et Y de y seul. En la divisant par y', tous ses termes deviennent des dérivées exactes ; on a

$$\frac{y''}{y'} = Y'y - X.$$

On en tire, par une intégration,

$$\text{Log}\, y' = \int Y dy - \int X dx, \qquad \text{d'où} \qquad y' = e^{\int Y dy - \int X dx}$$

Les variables se séparent et l'on trouve l'intégrale générale

$$\int e^{-\int X dx}\, dy = \int e^{-\int X dx}\, dx.$$

Il est à observer que l'équation

$$y'' + Py' = Qy'^2$$

s'intègre par quadratures dans les trois cas suivants : 1°) si P et Q dépendent de x seul (n° 244) ; 2°) si P et Q dépendent de y seul (n° 246) ; 3°) si P dépend de x seul et Q de y seul (on vient de le montrer).

Règle générale pour l'intégration des dérivées exactes. — Soit $f(x, y, y', \ldots y^n)$ une fonction donnée. Pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \ldots y^{n-1})$, il faut qu'on ait l'identité

$$f(x, y, y', \ldots y^n) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{n-1}} y^n.$$

On en conclut la règle suivante pour reconnaître si F existe et déterminer en même temps cette fonction :

Il faut d'abord que la plus haute dérivée y^n n'entre dans f qu'au premier degré. On intègre alors le coefficient de y^n *partiellement* par rapport à y^{n-1}, c'est à dire comme si y^{n-1} était seule variable. Soit u_1 l'intégrale obtenue ; $f - \frac{du_1}{dx}$ ne contiendra plus de terme en y^n, de sorte que la plus haute dérivée sera y^{n-p} $(p \geqslant 1)$. Cette différence devant être une dérivée exacte en même temps que f, il faut que y^{n-p} n'y entre qu'au premier degré. On intégrera alors le coefficient de y^{n-p} partiellement par rapport à y^{n-p-1}, ce qui donnera une intégrale u_2. Alors $f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}$ ne contiendra plus que des termes d'ordre $< n - p$ et devra être une différentielle exacte si f en est une. En continuant ainsi et si la fonction donnée f est une dérivée exacte, on parviendra, en dernier lieu, à un reste

$$f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} - \cdots - \frac{du_k}{dx} = X,$$

ne contenant plus de dérivée de y. Pour que celui-ci soit une dérivée exacte, il faut qu'il ne contienne plus que x. Si cette condition a lieu, on aura

$$F = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \int X dx.$$

Si cette condition n'avait pas lieu, ou si, dans le cours du calcul, on

rencontrait un reste dans lequel la plus haute dérivée entrât à un degré supérieur au premier, la méthode cesserait d'être applicable et la fonction proposée ne serait pas une dérivée exacte.

Soit, par exemple, la fonction donnée

$$f = y + 3xy' + 2yy'^3 + (x^2 + 2y^2y')\,y''.$$

On aura successivement

$$u_1 = x^2y' + y^2y'^2, \qquad f - \frac{du_1}{dx} = y + xy',$$

$$u_2 = xy, \qquad f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} = \mathrm{X} = 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{F} = x^2y' + y^2y'^2 + xy + \mathrm{C}$.

249. Equations homogènes. — Il y en a de diverses espèces. Mais les divers cas que nous allons étudier ne s'excluent pas nécessairement l'un l'autre.

Premier cas : *L'équation est homogène par rapport à y et à ses dérivées successives* (*ou par rapport à y, dy, d^2y,...*), c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on y remplace y par λy sans toucher à x, λ désignant une constante. *L'ordre de ces équations peut être abaissé d'une unité.*

En effet, faisons la substitution

$$y = e^z, \quad \text{d'où} \quad y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'' + z'^2), \ldots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation, e^z vient en facteur commun à une certaine puissance par suite de l'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la fonction inconnue z aura disparu de l'équation, donc l'ordre de l'équation s'abaissera d'une unité en prenant z' comme inconnue (n° 244).

Remarque. — Ce procédé s'applique à l'équation linéaire sans second membre, mais généralement sans avantage, parce qu'il enlève le caractère linéaire. Ainsi, par cette substitution, l'équation du deuxième ordre

$$y'' + \mathrm{P}y' + \mathrm{Q}y = 0$$

se ramène à l'équation de Riccati, du premier ordre en z',

$$\frac{dz'}{dx} + (z'^2 + \mathrm{P}z' + \mathrm{Q}) = 0,$$

ce que nous avons déjà remarqué (n° 187).

Exemples. — Appliquer cette méthode aux équations

$$ayy'' + by' = yy'(c^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$xyy'' - xy'^2 = yy' + bxy'^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Les équations en z' sont des équations de Bernoulli et les intégrales s'obtiennent sous forme finie. Toutefois on intègre plus facilement la première équation en remarquant que tous ses termes deviennnt des dérivées exactes quand on la divise par yy' (nº 248).

Deuxième cas : *L'équation est homogène par rapport à x et dx*, c'est-à-dire se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx sans toucher à y. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent en considérant y comme la variable indépendante et x comme la fonction inconnue. Il faudra donc remplacer les dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au moyen des dérivées de x par rapport à y (nº 246). Portant ces valeurs dans l'équation, on sera ramené au cas précédent.

En pratique, il est souvent préférable d'opérer autrement. On change de variable indépendante par la substitution $x = e^t$. Si l'on désigne par D les dérivées relatives à t, on a, de proche en proche, par la formule $\mathrm{D}e^{-ax}z = e^{-ax}(\mathrm{D} - a)z$,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\,\mathrm{D}y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\,\mathrm{D}(e^{-t}\,\mathrm{D}y) = e^{-2t}\,\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\,y, ..,$$

et, en général,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt}\,\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\ldots(\mathrm{D}-n+1)\,y.$$

Ainsi l'exposant de e^t dans l'expression de $\frac{d^n y}{dx^n}$ est précisément égal au degré d'homogénéité $-n$ de cette dérivée. Donc, si l'on porte ces valeurs de x, $\frac{dy}{dx}$,... dans l'équation, e^t vient en facteur commun à une puissance marquée par le degré d'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la variable indépendante t aura disparu. Donc l'ordre de l'équation peut être abaissé d'une unité (nº 246).

Il est à remarquer que, *pratiquement*, quand on substitue dans l'équation proposée les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,... indiquées ci-dessus, on néglige tout de suite les exponentielles e^{-t}, e^{-2t},... qui disparaissent du résultat et l'on remplace simplement x par 1.

Exemple. — Soit l'équation (homogène de degré 0)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left[mx^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + ny^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Par la substitution $x = e^t$, on a

$$D(D-1)\,y = (m\,Dy^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Prenons $Dy = p$ pour inconnue ; on a $D^2y = p\dfrac{dp}{dy}$, d'où

$$p\,\frac{dp}{dy} - p = (mp^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}$$

C'est une équation homogène du 1er ordre, dont l'intégration se ramène à des quadratures.

Troisième cas : *L'équation est homogène par rapport à x, y et leurs différentielles dx, dy, d^2y,...*, c'est-à-dire qu'elle se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace à la fois x par λx et y par λy, λ désignant une constante. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent par la substitution $y = ux$ en considérant u comme nouvelle inconnue. En effet, si l'on change x en λx sans toucher à u, cela revient à changer x en λx et y en λy et l'équation entre u et x se reproduira multipliée par une puissance de λ ; donc elle sera homogène par rapport à x et à dx.

Pratiquement, on opère directement comme il suit : on change tout de suite de fonction et de variable par les formules

$$x = e^t, \qquad y = e^t u,$$

t désignant la nouvelle variable indépendante. On a alors, eu égard à la formule du n° précédent, puis par la formule (10) du n° 233,

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} &= e^{-nt}\,D(D-1)\dots(D-n+1)\,.\,e^t u \\ &= e^{-(n-1)t}(D+1)\,D\dots(D-n+2)\,u. \end{aligned}$$

Portant ces valeurs de x, y, $\dfrac{dy}{dx}$,... dans l'équation proposée, on obtient une équation entre u et t où manque la variable indépendante t. Donc l'ordre de cette équation peut s'abaisser d'une unité.

Exemples : Les deux équations suivantes :

$$mx^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx} \right)^2, \qquad x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx} \right)^3 ,$$

conduisent à des équations de Bernoulli en Du et ont respectivement pour intégrales :

$$C_1 + C_2 x = x e^{-\frac{y}{mx}}, \qquad y = x\left(C - \arc\sin\frac{C_1}{x}\right).$$

Quatrième cas : *L'équation est homogène par rapport aux quantités x, dx (considérées comme de degré 1) et y, dy, d^2y,... (considérées comme de degré n)*, c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx et y par $\lambda^n y$. Ce cas se ramène au précédent en posant $y = z^n$. Mais il est inutile de passer par cette transformation. Il vaut mieux changer tout de suite de fonction et de variable par les formules.

$$x = e^t, \qquad y = u e^{nt}.$$

Soit D l'indice de dérivation par rapport à t ; on aura, en général, en appliquant encore la formule (**10**) du n° 233,

$$\begin{aligned}\frac{d^p y}{dx^p} &= e^{-pt}\,D(D-1)\cdots(D-p+1)\,ue^{nt}\\ &= e^{(n-p)t}\,(D+n)(D+n-1)\cdots(D+n-p+1)\,u.\end{aligned}$$

L'exposant de e^t est égal au degré d'homogénéité de $\frac{d^p y}{dx^p}$. Donc, si l'on substitue ces valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$,... dans l'équation, la même exponentielle viendra en facteur commun et la variable t disparaîtra par la suppression de ce facteur.

Exemple. — Soit l'équation (homogène de degré 4, en considérant y comme un carré)

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2.$$

Par les substitutions $x = e^t$ et $y = ue^{2t}$, on trouve l'équation en u

$$D^2u + 2(1-u)\,Du = 0.$$

Le premier membre est une dérivée exacte, d'où l'intégrale première

$$Du - (1-u)^2 = C.$$

Les variables se séparent et l'intégration s'achève sans difficulté.

250. Equation du second ordre où manque $\frac{dy}{dx}$ (Equation de Jacobi). — Jacobi a montré que si l'on connaît une intégrale première de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y), \tag{11}$$

l'intégration s'achève par des quadratures. Soit, en effet, connue l'intégrale première (contenant une constante C)

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, C)\,; \tag{12}$$

je dis que $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ *sera le facteur intégrant* (n° 188) *de l'équation*

$$dy - \varphi\, dx = 0,$$

de sorte que l'intégrale générale sera

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi\, dx) = C_1.$$

Pour établir cette proposition, nous remarquons que toute intégrale de l'équation (**11**), vérifiant (**12**), satisfait aussi aux deux équations suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad f(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x, y, C),$$

obtenues en dérivant (**12**) puis en éliminant les dérivées de y. Mais la dernière équation, qui a eu lieu entre x, y et C seulement, est une *identité*, car elle est satisfaite par des valeurs arbitraires de x, y et y' (donc de C qui est arbitraire avec y'). On peut donc la dériver partiellement par rapport à C ; on en déduit une nouvelle identité

$$\frac{d^2\varphi}{\partial x\,\partial C} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial C} = 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right).$$

C'est précisément la condition qui exprime que $\frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi\, dx)$ est une différentielle exacte.

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x},$$

connaissant l'intégrale première

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x + C\cos x.$$

On aura $\frac{\partial\varphi}{\partial C} = \cos x$; l'intégrale générale sera donc

$$\int \cos x[dy - (y \operatorname{tg} x + C\cos x)\, dx] = y\cos x - \frac{C}{2}(x + \sin x\cos x) = C_1.$$

Remarque. — L'équation plus générale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x, y) = 0$$

s'intègre aussi par des quadratures quand on en connaît une intégrale première. En effet, on peut, par une quadrature, faire disparaître le terme du premier ordre ; il faut faire le changement d'inconnue, déjà indiqué (nº 146, II),

$$y = z\,e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}$$

L'équation entre z et x sera une équation de Jacobi et l'on en connaîtra une intégrale première.

§ 8. Applications géométriques.

251. Problème. *Trouver une courbe plane dont le rayon de courbure* R *soit une fonction donnée de l'abscisse.*

Soit X l'inverse de cette fonction, l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = X.$$

Mais 1 : R est une dérivée exacte par rapport à x, car on a

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{y''}{y'^3}}{\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Il vient donc, en intégrant les deux membres de (1).

$$\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \int X\,dx, \qquad \text{d'où} \qquad y' = \frac{\int X\,dx}{\sqrt{1 - (\int X\,dx)^2}}$$

L'équation de la courbe cherchée sera donc

$$(3) \qquad y = \int dx \frac{\int X\,dx}{\sqrt{1 - (\int X\,dx)^2}}.$$

Le radical comporte un double signe qui correspond aux deux sens dans lesquels la courbe peut tourner sa concavité.

252. Cas particulier (Courbe élastique). — *Trouver la courbe dont le rayon de courbure est en raison inverse de l'abscisse.*

Soit $\frac{a^2}{2}$ la raison constante, en sorte que

$$(4) \qquad R = \frac{a^2}{2x}, \qquad \frac{1}{R} = \frac{2x}{a^2}.$$

Il faut faire $X = 2x : a^2$ dans l'équation (3). Il viendra, en faisant apparaître les constantes d'intégration C et C_1,

$$\int X\,dx = \frac{x^2 + C}{a^2}$$

$$(5) \qquad y - C_1 = \int \frac{(x^2 + C)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + C)^2}}.$$

C'est l'équation de la courbe cherchée. Cette intégrale, qui ne peut s'exprimer sous forme finie, dépend des fonctions elliptiques. La courbe porte le nom de *courbe élastique*, parce que c'est la figure d'équilibre d'une lame élastique, quand, une des extrémités étant fixée, l'autre supporte un poids.

253. Problème. — *Trouver les courbes dans lesquelles le rayon de courbure est proportionnel à la normale.*

Soit a le rapport de proportionnalité ($a > 0$). On aura (*t.* I, n° 309)

$$\frac{N}{R} = -\frac{yy''}{1 + y'^2} = \pm a$$

On prend le signe supérieur si R et N sont du même côté de la courbe, le signe inférieur dans le cas contraire.

C'est une équation où manque x (n° 246). Posons $y' = p$, elle devient

$$yp\frac{dp}{dy} = \mp a(1 + p^2), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{2p\,dp}{1 + p^2} = \pm \frac{2a\,dy}{y}$$

et, en intégrant,

$$1 + p^2 = Cy^{\mp 2a} \qquad\qquad p = \sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}$$

La valeur de x s'obtient alors par une quadrature

$$x - C_1 = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\sqrt{Cy^{\mp 2a} - 1}}$$

Mais cette quadrature ne s'effectue sous forme finie que dans des cas particuliers, par exemple si $a = 1$. Examinons ce cas.

1° Si R et N sont du même côté de la courbe, on prend le signe supérieur : la courbe cherchée est un cercle

$$x - C_1 = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{C - y^2}} = -\sqrt{C - y^2},$$

d'où $(x - C_1)^2 + y^2 = C$.

2° Si R et N sont de part et d'autre de la courbe, celle-ci est une

chaînette. En effet, prenant le signe inférieur et remplaçant C par $1 : \alpha^2$; il vient

$$x - C_1 = \int \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} = \text{Log}\ \frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha}$$

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x - C_1}{\alpha}} + e^{-\frac{x - C_1}{\alpha}}\right)$$

254. Problème. — *Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure* R *soit proportionnel au rayon vecteur* r.

Utilisons les coordonnées polaires r et θ. L'équation de la courbe, $R = nr$, s'écrit, d'après la valeur connue de R (*t.* I, nº 314), les dérivées étant relatives à θ,

$$(6) \qquad \mp (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = nr\,(r^2 + 2r'^2 - rr'').$$

Il faut prendre le signe + ou le signe — selon que la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers le pôle, ou bien selon que R et r sont du même côté ou de part et d'autre de la courbe [1].

L'équation (**6**) est une équation homogène par rapport à r et ses dérivées. Par la substitution $r = e^z$, elle devient

$$\mp (1 + z'^2)^{\frac{3}{2}} = n\,(1 + z'^2 - z''), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{z''}{1 + z'^2} = 1 \pm \frac{1}{n}\sqrt{1 + z'^2}$$

On peut d'abord, en prenant le signe inférieur, satisfaire à cette équation par une valeur constante de z' (pourvu toutefois que n soit $\geqslant 1$). Il faut annuler le second membre, ce qui donne

$$z' = \sqrt{n^2 - 1}, \qquad \text{d'où} \qquad z = \theta\sqrt{n^2 - 1} + \text{const.}$$

La courbe correspondante est une spirale logarithmique $r = Ce^{\theta\sqrt{n^2-1}}$ et c'est une solution *particulière* du problème, car la forme de l'équation (**6**) exclut la possibilité d'une solution singulière (nº 178,3º).

Cherchons maintenant les courbes dans lesquelles z' varie. Prenons comme nouvelle variable indépendante l'angle α déterminé par les formules

$$z' = \text{tg}\,\alpha, \qquad \pm\sqrt{1 + z'^2} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

de sorte que l'intervalle où varie α dépend du signe ambigu et réciproquement. L'équation prend la forme

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{1}{n\cos\alpha}, \qquad \text{d'où} \qquad d\theta = \frac{n\cos\alpha\, d\alpha}{1 + n\cos\alpha}.$$

[1] En effet, on doit prendre le signe + ou — selon que $r^2 + 2r'^2 - rr''$ est $>$ ou < 0 ; donc, en vertu de la formule (**20**) du nº 314 du *t.* I, selon que la dérivée α' de l'inclinaison α de R sur l'axe polaire est $>$ ou < 0 ; ou encore selon que α et θ varient dans le même sens ou en sens contraire, donc selon que R et r tournent dans le même sens ou non quand on décrit la courbe, ce qui revient à la règle énoncée.

Il vient alors

$$z = \int \operatorname{tg} \alpha \, d\theta = \int \frac{n \sin \alpha \, d\alpha}{1 + n \cos \alpha} = -\operatorname{Log}(1 + n \cos \alpha) + \text{const.}$$

On obtient ainsi une *représentation paramétrique* de la courbe cherchée

$$(7) \quad r = e^z = \frac{C}{1 + n \cos \alpha}, \qquad \theta = \int \frac{n \cos \alpha \, d\alpha}{1 + n \cos \alpha} = \alpha - \int \frac{d\alpha}{1 + n \cos \alpha}$$

Il est facile d'effectuer l'intégration.

Contentons-nous d'achever la solution pour $n = 1$, c'est-à-dire quand *le rayon de courbure est égal au rayon vecteur.*

La solution correspondant à la spirale logarithmique est un cercle $r = C$. Etudions la solution fournie par les formules (7).

Menons l'axe polaire de façon que θ s'annule avec α, et soit r_0 la valeur de r pour $\theta = \alpha = 0$. Les équations (7) se réduisent à la forme simple

$$(8) \qquad r = \frac{r_0}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \qquad \theta = \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ce sont les équations de la courbe cherchée.

On voit de suite qu'on retrouve le même point du plan quand α augmente de 2π. On obtient donc toute la courbe en faisant varier α de $-\pi$ à $+\pi$. D'ailleurs la courbe décrite dans l'intervalle $(0, -\pi)$ est symétrique (par rapport à l'axe polaire) de celle décrite dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Faisons donc varier α de 0 à π. On voit que la courbe est une spirale, formée d'un nombre infini de spires qui se développent indéfiniment. Cette courbe satisfait à l'équation (6) pour $n = 1$. Mais, comme on l'a dit plus haut, il faut prendre le signe supérieur dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ où $\cos\alpha$ est positif (et où la courbe tourne donc sa convexité vers le pôle), le signe inférieur dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ où $\cos \alpha$ est négatif (et où la courbe tourne sa concavité vers le pôle). Il n'y a que la première spire qui ne tourne pas autour du pôle.

255. Equation intrinsèque d'une courbe plane. — On appelle *équation intrinsèque* d'une courbe plane, la relation qui lie son rayon de courbure à son arc. Nous allons voir bientôt la raison de cette dénomination.

Supposons les coordonnées rectangulaires et soit

$$(9) \qquad \frac{1}{R} = f(s)$$

la relation donnée. C'est une équation différentielle du second ordre.

Soit φ l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x ; on a les formules connues

$$(10) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}.$$

Pour la généralité de ces formules, on doit considérer R comme susceptible des deux signes. En effet, ds étant supposé positif, $d\varphi$ est positif ou négatif suivant que la tangente tourne dans un sens ou dans l'autre. Donc, si l'on passe par un point d'inflexion, R change de signe.

On tire de la dernière équation (**10**)

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{R} = \varphi_0 + \int_0^s f(s)\, ds = \varphi_0 + F(s),$$

en désignant par φ_0 la valeur de φ au point pris comme origine des arcs.

Il vient ensuite, en intégrant les équations précédentes,

$$x = x_0 + \int_0^s \cos(\varphi_0 + F)\, ds, \qquad y = y_0 + \int_0^s \sin(\varphi_0 + F)\, ds.$$

C'est une représentation paramétrique de la courbe cherchée.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées à l'origine des arcs, x_0 et y_0 seront nuls ; si ensuite on prend la tangente à l'origine pour axe des x, φ_0 sera nul ; les équations précédentes se réduisent alors à

$$(11 \qquad x = \int_0^s \cos(F)\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin(F)\, ds$$

et, comme elles ne contiennent plus de constantes arbitraires, elles représentent une courbe complètement déterminée. Donc l'équation (**9**) ne représente que les courbes *complètement déterminées de forme* qu'on obtient en déplaçant celle-ci d'une manière arbitraire dans son plan. C'est pour cela que l'équation (**9**) porte le nom d'*équation intrinsèque*. On peut en déduire toutes les propriétés de la courbe considérée en elle-même, abstraction faite de sa position par rapport à toute autre ligne.

Remarquons encore que, dans l'intégration d'une équation intrinsèque, il est inutile d'introduire des constantes arbitraires. On peut toujours les introduire après coup par un déplacement arbitraire des axes coordonnés.

Voici quelques exemples :

I. Soit à intégrer l'équation $R = a$. On a, sans introduire de constantes,

$$\varphi = \int \frac{ds}{R} = \frac{s}{a}, \quad x = \int \cos\frac{s}{a}\,ds = a\sin\frac{s}{a}, \quad y = \int \sin\frac{s}{a}\,ds = -a\cos\frac{s}{a}.$$

Eliminant s, on voit que la courbe est un *cercle* : $x^2 + y^2 = a^2$.

II. Soit à intégrer $R = \frac{s^2 + a^2}{a}$. On a

$$\varphi = \int \frac{a\,ds}{s^2 + a^2} = \text{arc tg}\,\frac{s}{a}$$

$$x = \int \cos\left(\text{arc tg}\,\frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}} = a\,\text{Log}\,\frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}$$

$$y = \int \sin\left(\text{arc tg}\,\frac{s}{a}\right) ds = \int \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

La courbe est une *chaînette* $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

III. Soit encore à intégrer $R^2 + s^2 = 16a^2$. On aura, en prenant φ comme variable indépendante,

$$\varphi = \int \frac{ds}{\sqrt{16a^2 - s^2}} = \text{arc sin}\,\frac{s}{4a}, \qquad s = 4a\sin\varphi.$$

$$x = \int \cos\varphi\,ds = 4a\int \cos^2\varphi\,d\varphi = a(2\varphi + \sin 2\varphi)$$

$$y = \int \sin\varphi\,ds = 2a\int \sin 2\varphi\,d\varphi = -a\cos 2\varphi.$$

Si l'on change 2φ en $\pi + u$, ces deux dernières équations s'écrivent

$$x - a\pi = a\,(u - \sin u), \qquad y - a = -a\,(1 - \cos u)\,;$$

et, par le changement d'axes $x - a\pi = \xi$, $y - a = -\eta$,

$$\xi = a\,(u - \sin u), \qquad \eta = a\,(1 - \cos u),$$

elles représentent donc une *cycloïde*.

Remarque. — Le problème de trouver une courbe définie par la relation $R = F(\varphi)$ entre le rayon de courbure et l'inclinaison de la tangente, se ramène au précédent par la relation $ds = R\,d\varphi$. On aura donc

$$x = \int F(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi \qquad y = \int F(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

§ 9. Systèmes d'équations différentielles. Systèmes linéaires.

256. Systèmes canoniques. — Nous disons qu'un système d'équations différentielles entre plusieurs fonctions inconnues x, y,... de t est *canonique*, si le nombre des équations est égal à celui des fonctions inconnues et si le système est résolu par rapport aux plus hautes dérivées de chaque inconnue. En pratique, on ne rencontre guère que des systèmes canoniques ou facilement réductibles à cette forme.

Un système canonique d'équations du premier ordre, résolu, par conséquent, par rapport aux dérivées premières des fonctions inconnues, est un *système normal*. Nous avons démontré précédemment l'existence des intégrales d'un système normal et nous avons montré que le nombre des constantes arbitraires comprises dans son intégrale générale est égal au nombre des fonctions inconnues ou des équations du système.

257. Théorème I. — *Tout système canonique d'équations d'ordre supérieur se ramène à un système normal, ne contenant que des dérivées premières, en considérant comme des inconnues auxiliaires toutes les dérivées, sauf celles de l'ordre le plus élevé pour chaque inconnue, et en ajoutant au système les équations qui définissent ces inconnues auxiliaires.*

Ainsi, par exemple, le système canonique

$$x'' = f(t, x, x', y, y', y''), \qquad y''' = f_2(t, x. x', y, y', y'')$$

revient au système normal de cinq équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = f_1(t, x, x', y, y', y''),$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = y'', \qquad \frac{dy''}{dt} = f_2(t, x, x', y, y', y'')$$

entre t et les fonctions inconnues x, x', y, y', y''.

Il en résulte que, pour obtenir le nombre d'inconnues (ou d'équations) du système normal auquel se ramène un système canonique, il faut ajouter les ordres des plus hautes dérivées de chaque inconnue.

Ce nombre sera aussi celui des constantes arbitraires des intégrales générales ; on peut donc le considérer comme caractérisant l'*ordre* du système canonique.

258. Théorème II. — *L'intégration d'un système normal de n équations à n inconnues se ramène à l'intégration d'une seule équation d'ordre n entre deux variables, ou bien à l'intégration successive de plusieurs équations entre deux variables, la somme des ordres de ces équations étant n.*

Le théorème est vrai pour une seule équation, il suffit donc de montrer qu'il est vrai pour un système normal de n équations, s'il est vrai pour un système normal d'ordre moins élevé.

Pour fixer les idées, considérons seulement le système suivant de trois équations à trois fonctions inconnues x, y, z, le raisonnement étant général :

$$\text{(I)} \qquad x' = f_1(t, x, y, z), \quad y' = f_2(t, x, y, z), \quad z' = f_3(t, x, y, z).$$

Si f_1 ne contient qu'une seule fonction inconnue x, la première équation est du *premier ordre* à deux variables et détermine x. Portant la valeur de x dans les deux équations suivantes, on est ramené à intégrer un système normal de deux équations seulement. Dans ce premier cas, la proposition est établie.

Supposons donc que f_1 contienne une autre inconnue que x, par exemple y. Résolvons $f_1 = x'$ par rapport à y ; il vient

$$\text{(1)} \qquad y = \varphi(t, x, x', z).$$

Portons cette valeur dans les autres équations du système (I). En la substituant dans $y' = f_2$, la dérivée x'' s'introduit ainsi que z', mais nous résolvons le système par rapport à x'' et z'. Nous formons ainsi le système à deux inconnues x et z

$$\text{(II)} \qquad x'' = \varphi_2(t, x, x', z), \qquad z' = \varphi_3(t, x, x', z).$$

Si z disparaît de φ_2, l'équation $x'' = \varphi_2$ est du *deuxième ordre* à deux variables et détermine x. Portant la valeur de x dans la dernière équation, on est ramené à intégrer celle-ci, qui est du *premier ordre*. Ensuite y est donné sans intégratiou par l'équation (1). Dans ce deuxième cas, la proposition est encore établie.

Supposons enfin, ce qui est la règle générale, que φ_2 contienne z. Tirons z de $x'' = \varphi_2$; il vient

$$\text{(2)} \qquad z = \psi(t, x, x', x'').$$

Portons cette valeur dans la dernière équation du système (II) ; nous introduisons x''' et en résolvant par rapport à x''', nous trouvons

$$\text{(III)} \qquad x''' = \psi_3(t, x, x', x'').$$

L'équation (III) est du 3e ordre à deux variables. L'intégration du système (I) revient à celle de cette unique équation (III), car, x étant connu, on obtient sans intégration z puis y par les relations (2) et (1).

Dans ce troisième et dernier cas, le théorème est encore établi.

259. Remarque. — Tout système canonique d'équations d'ordre quelconque se ramenant à un système normal par l'adjonction d'inconnues auxiliaires, son intégration se ramène aussi à celle d'une ou de plusieurs équations à deux variables.

Quand la réduction à une seule équation est possible, celle-ci peut généralement s'obtenir sans passer par l'intermédiaire du système normal. Il suffit de dériver les équations du système un certain nombre de fois, de manière à former le nombre d'équations nécessaire pour pouvoir éliminer toutes les fonctions inconnues sauf une.

Soit, par exemple, le système canonique entre x, y et t

$$x''' = y + y', \qquad y'' = x' + x''.$$

On forme l'équation à laquelle satisfait x, en dérivant deux fois la première équation et en remplaçant deux fois y'' par sa valeur $x' + x''$. Il vient successivement

$$x^{\text{IV}} = y' + x' + x'', \qquad x^{\text{V}} = x' + 2x'' + x'''.$$

L'intégration du système proposé dépend de celle de cette dernière équation qui est linéaire et du 5e ordre. On détermine x par l'intégration de celle-ci ; après quoi, y, y' et y'' se tirent sans intégration des équations précédentes.

260. Diverses espèces de systèmes linéaires. Leur intégration par réduction à des équations à deux variables. — On appelle *systèmes linéaires* ceux qui sont linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées ; systèmes *linéaires et homogènes* (ou *sans seconds membres*) ceux qui sont linéaires et homogènes par rapport à ces mêmes quantités ; systèmes *à coefficients constants*, ceux où les coefficients des inconnues et de leurs dérivées sont des constantes.

Tout système canonique d'équations différentielles simultanées se ramène à un système normal par l'adjonction d'inconnues auxiliaires. On constate immédiatement que cette réduction laisse subsister : 1° le caractère linéaire, 2° le caractère homogène, 3° celui de constance de coefficients, quand ces caractères existent dans le système proposé.

D'autre part, l'intégration d'un système normal se ramène à l'intégration d'une ou de plusieurs équations à deux variables. Cette réduction laisse aussi subsister le caractère linéaire et celui de constance des coefficients quand ces caractères existent.

Donc l'intégration des systèmes linéaires se ramène, par les principes généraux, à l'intégration d'une seule équation linéaire.

De même, l'intégration des systèmes à coefficients constants se ramène à l'intégration d'une seule équation linéaire à coefficients constants.

Toutefois, pour les systèmes à coefficients constants et sans seconds membres, cette méthode ne sera généralement pas la plus expéditive en pratique. La méthode directe indiquée au n° suivant sera préférable. Elle a d'ailleurs l'avantage de s'appliquer aussi facilement aux systèmes de forme quelconque qu'aux systèmes canoniques. Ensuite, pour les systèmes avec seconds membres, il y a lieu d'étudier le procédé de réduction de plus près, ce qui sera fait au n° 262.

261. Intégration des systèmes linéaires à coefficients constants et sans seconds membres. — Considérons, pour fixer les idées, un système (canonique ou non) de trois équations entre trois fonctions inconnues x, y, z de t, de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} Lx + My + Nz &= 0,\\ L_1x + M_1y + N_1z &= 0,\\ L_2x + M_2y + N_2z &= 0,\end{aligned}\right.$$

L, M, N désignant des polynomes symboliques en D à coefficients constants tels que

$$a_0D^m + a_1D^{m-1} + \cdots + a_m.$$

Nous appellerons *déterminant du système* le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}$$

et nous désignerons ses mineurs par

$$\begin{matrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}$$

Ce déterminant Δ joue un rôle essentiel dans l'intégration du système (1). Nous supposerons, dans le n° actuel, qu'il n'est pas identiquement nul.

THEORÈME. — *Les trois inconnues x, y, z vérifient la même équation linéaire à coefficients constants et sans second membre $\Delta u = 0$.*

En effet, multiplions respectivement les équations (2) par l, l_1, l_2 et ajoutons ; il vient, par les propriétés des mineurs, $\Delta x = 0$. De même, $\Delta y = \Delta z = 0$.

Ce théorème conduit à la méthode la plus commode pour intégrer le système. C'est la *méthode des coefficients indéterminés.*

En effet, résolvons l'*équation caractéristique* $\Delta = 0$; soient r, s,... ses racines, λ μ,... leurs ordres de multiplicité. On aura nécessairement

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \mathrm{P}e^{rt} + \mathrm{Q}e^{st} + \cdots \\ y &= \mathrm{P}_1 e^{rt} + \mathrm{Q}_1 e^{st} + \cdots, \\ z &= \mathrm{P}_2 e^{rt} + \mathrm{Q}_2 e^{st} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

les polynomes P étant de degré $\lambda - 1$, Q de degré $\mu - 1$,...

On substituera donc ces valeurs dans les équations (3) et l'on identifiera les résultats à zéro. Il en résultera un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients des polynomes P, entre ceux des polynomes Q,... séparément, car il ne se fait pas de réductions entre les termes contenant des exponentielles différentes. La solution contiendra autant de constantes arbitraires qu'il restera de coefficients indéterminés. Nous démontrerons, dans le nº suivant, que ce nombre est égal au degré de Δ que l'on appelle l'*ordre du système.*

Cette analyse tombe en défaut si Δ se réduit à une constante. Si cette constante est autre que 0, le système se résout sans intégration : les équations $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, se réduisent simplement à $x = y = z = 0$. Ces valeurs satisfont au système (3) et il n'y a pas d'autre solution.

Si $\Delta = 0$, la méthode ne s'applique plus ; il faut recourir au procédé général développé dans le nº suivant.

CAS D'UN SYSTÈME NORMAL. — C'est cette méthode que l'on applique, en pratique, pour l'intégration d'un *système normal.* Celui-ci est de la forme

$$\left\{ \begin{aligned} (\mathrm{D} + a)x + b y + c z &= 0, \\ a_1 x + (\mathrm{D} + b_1) y + c_1 z &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + (\mathrm{D} + c_2) z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Son intégration dépend donc de la résolution de l'*équation caractéristique*, qui est ici du 3e degré :

$$\begin{vmatrix} D + a & b & c \\ a_1 & D + b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & D + c_2 \end{vmatrix} = 0;$$

et l'intégrale générale renfermera trois constantes, conformément aux théorèmes généraux.

Exemple : Soit à intégrer le système normal

$$(D + 1)\,x - y = 0, \qquad x + (D - 1)y = 0.$$

On a ici $\Delta u = D^2 = 0$. On doit donc substituer les valeurs,

$$x = C + C't, \qquad y = C_1 + C_1't,$$

ce qui conduit aux relations $C_1 = C + C'$ et $C_1' = C'$. Les intégrales sont, avec deux constantes C et C',

$$x = C + C't, \qquad y = C + C'(1 + t)$$

262. Systèmes à coefficients constants complets ou avec seconds membres. — Reprenons le système (**3**) du n° précédent, mais en mettant trois fonctions T, T_1 et T_2 de t dans les seconds membres. Nous obtenons le système complet

$$(4) \qquad \begin{cases} Lx + My + Nz = T, \\ L_1x + M_1y + N_1z = T_1, \\ L_2x + M_2y + N_2z = T_2. \end{cases}$$

La méthode générale d'intégration du système (**4**), applicable d'ailleurs au système (**3**), est la méthode de réduction à l'intégration d'une ou de plusieurs équations successives à deux variables (n° 258). Mais cette méthode présente, dans le cas qui nous occupe, des caractères particuliers qui méritent de fixer l'attention.

Elle consiste à appliquer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut ramener le système* (**4**) *à un autre équivalent et de même déterminant* Δ, *mais dans lequel deux des coefficients de x sont nuls.*

En effet, supposons que L et L_1 diffèrent de 0 et que L soit de degré au moins égal à celui de L_1. En divisant L par L_1, on a

$$L = \lambda L_1 + R$$

et, si $R = L - \lambda L_1$ n'est pas nul, il sera de degré moindre que L et L_1.

Ceci posé, multiplions la deuxième équation (4) par λ et soustrayons-la de la première. Nous formons un système équivalent à (4) et de même déterminant Δ :

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathrm{L}-\lambda\mathrm{L}_1)x + (\mathrm{M}-\lambda\mathrm{M}_1)y + (\mathrm{N}-\lambda\mathrm{N}_1)z = \mathrm{T}-\lambda\mathrm{T}_1, \\ \mathrm{L}_1x + \mathrm{M}_1y + \mathrm{N}_1z = \mathrm{T}_1, \\ \mathrm{L}_2x + \mathrm{M}_2y + \mathrm{N}_2z = \mathrm{T}_2, \end{cases}$$

dans lequel la somme des degrés des coefficients de x est abaissée. Si deux des coefficients de x ne sont pas nuls dans le système (5), on abaissera de nouveau la somme des degrés des coefficients de x par une transformation analogue. Cet abaissement ne pouvant se répéter indéfiniment, on ramènera finalement le système (4) à un autre équivalent, de même déterminant Δ, et dans lequel deux des coefficients de x seront nuls. Désignons ce système par

$$\begin{cases} \delta x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \tau, \\ \mathrm{B}_1y + \mathrm{C}_1z = \mathrm{T}_3, \\ \mathrm{B}_2y + \mathrm{C}_2z = \mathrm{T}_4, \end{cases}$$

les lettres δ, B, C représentant des polynomes symboliques en D, et les seconds membres des fonctions connues de t.

L'intégration de ce nouveau système dépend de celle du système à deux inconnues y et z formé par les deux dernières équations. Mais il existe évidemment, pour ce système de deux équations, un théorème analogue à celui que nous venons de démontrer pour le système (4). On peut donc le ramener à un système équivalent où l'un des deux coefficients de y sera nul.

En définitive, après un nombre limité d'opérations (correspondant chacune à une division), le système (4) sera ramené à un autre équivalent, de même déterminant Δ, mais de la forme

$$(6)\quad \begin{cases} \delta x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \tau, \\ \delta_1 y + \mathrm{C}_1 z = \tau_1, \\ \delta_2 z = \tau_2. \end{cases} \qquad (\Delta = \delta\delta_1\delta_2)$$

Celui-ci est préparé pour l'intégration.

Cas où Δ n'est pas nul. — Aucun des facteurs symboliques δ, δ_1 δ_2 n'étant nul, l'intégration du système (6) ne dépend plus que de l'intégration d'équations à deux variables : la troisième donne z, ensuite la

deuxième donne y et enfin la première donne x. Le nombre des constantes d'intégration est égal à la somme des ordres des équations intégrées, donc à la somme des degrés de δ_2, δ_1 et δ, c'est-à-dire au degré de Δ. C'est la conclusion fondamentale déjà énoncée au n° précédent.

En pratique, il arrive le plus souvent que δ et δ_1 se réduisent à de simples constantes. L'intégration du système (**6**) revient alors à l'intégration de la dernière équation seule.

$$\delta_2 z = \tau_2, \qquad \text{ou} \qquad \Delta z = \delta\delta_1\tau_2.$$

Ensuite x et y sont donnés, sans intégration, par les deux équations précédentes.

Dans l'intégration du système (**4**) ou du système (**6**), on utilise souvent avec l'avantage le théorème suivant, qui se démontre comme dans le cas d'une seule équation (n° 211) :

Les intégrales générales du système complet s'obtiennent en ajoutant respectivement aux intégrales générales X, Y, Z *du système sans seconds membres des solutions particulières* ξ, η, ζ *du système complet.*

On en conclut, en particulier, ce second théorème :

L'intégration d'un système avec seconds membres dont le déterminant Δ *est de degré* n, *se ramène à* n *quadratures.*

En effet, les solutions générales du système sans seconds membres s'obtiennent sans intégration par la méthode du n° précédent. Il faut y ajouter un système d'intégrales particulières du système complet, lequel s'obtiendra comme il suit :

Considérons le système (**6**). Soient p, q, r les degrés de δ, δ_1 et δ_2. On obtient une intégrale particulière z (3e équation) par r quadratures faites sans introduire de constante arbitraire (n° 212) ; on obtient une valeur correspondante de y (2e équation) par q quadratures sans introduire de constante ; enfin on obtient une valeur correspondante de x par p quadratures. Cela fait en tout $p + q + r = n$ quadratures.

Si l'on connaît d'avance ou si l'on trouve facilement une solution particulière du système complet, on sera dispensé de faire les quadratures exigées par le théorème précédent.

Cas où Δ est nul. — *Le système est indéterminé ou incompatible.* Ce cas a peu d'importance pratique. Contentons-nous d'un exemple.

Pour que Δ soit nul, il faut qu'un au moins des facteurs δ, δ_1 ou δ_2 soit nul : 1° Si δ_2 est nul, sans que τ_2 le soit, le système (**6**) est impossible. 2° Si δ_2 et τ_2 sont nuls tous deux (δ et δ_1 ne l'étant pas), la valeur de z reste arbitraire et le système (**6**) est indéterminé.

263. Théorèmes généraux sur les systèmes linéaires normaux. — Nous considérons d'abord un système de n équations sans seconds membres entre n fonctions inconnues x, y,... v de la variable t, de la forme

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x' + ax + by + \cdots = 0, \\ y' + a_1 x + b_1 y + \cdots = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

les lettres a, b,... a_1,... désignant des fonctions données de t.

THÉORÈME I. — *Si* $(x_1, y_1,...)$, $(x_2, y_2,...)$,... *sont des systèmes de solutions particulières du système, les expressions*

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots, \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots, \qquad \cdots$$

où C_1, C_2, *sont des constantes arbitraires seront de nouvelles intégrales du système.*

Substituons ces valeurs dans la première équation par exemple, il vient effectivement

$$C_1(x_1' + ax_1 + by_1 + \cdots) + C_2(x_2' + ax_2 + by_2 \cdots) + \cdots = 0.$$

DÉFINITION. — On dit que $p\ (p \leqslant n)$ solutions $(x_1, y_1,... v_1)$,... $(x_p, y_p,... v_p)$ du système (**7**) sont *indépendantes*, si l'un au moins des déterminants d'ordre p formés avec p lignes du tableau

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{array}$$

est différent de 0.

Par analogie, une seule solution $(x_1, y_1....)$ est *indépendante* si l'une au moins des fonctions x_1, y_1,... n'est pas nulle.

THÉORÈME II. — *Le système* (**7**) *admet* n *solutions indépendantes, et si* $(x_1, y_1,...)$,... $(x_n, y_n,...)$ *sont* n *solutions indépendantes, l'intégrale générale sera, avec* n *constantes arbitraires* C,

$$(8)\quad x = C_1 x_1 + \cdots + C_n x_n, \qquad y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n, \ldots$$

Prouvons d'abord l'existence de n solutions indépendantes.

Si, par impossible, on ne pouvait trouver que $p < n$ solutions indé-

pendantes $(x_1, y_1, \ldots), \ldots (x_p, y_p, \ldots)$, toute intégrale $x, y, \ldots$ du système devrait annuler les déterminants d'ordre $p+1$, tels que

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ y & y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Les relations ainsi obtenues ne seraient pas toutes identiquement satisfaites, car, parmi les mineurs relatifs aux éléments $x, y, \ldots$ il y a au moins un déterminant d'ordre p qui n'est pas nul par hypothèse. Donc les intégrales générales $x, y, \ldots$ seraient liées par une relation au moins et leurs valeurs initiales ne seraient pas arbitraires, ce qui est inexact.

Donc il existe n solutions indépendantes, avec lesquelles on peut former les expressions (**8**). Ces expressions sont des intégrales par le théorème I. De plus, ce sont les intégrales générales, car les équations (**8**) forment un système résoluble par rapport aux lettres C (le déterminant du système n'étant pas nul). On peut donc disposer des constantes de manière à attribuer à $x, y, \ldots$ des valeurs initiales arbitraires (puisque les valeurs correspondantes des C s'obtiennent par la résolution du système).

Théorème III. — *Les intégrales générales d'un système avec seconds membres s'obtiennent en ajoutant respectivement aux intégrales générales* X, Y,... *du système sans seconds membres des intégrales particulières* $\xi, \eta, \ldots$ *du système complet.*

Même démonstration que pour une équation (n° 211).

Théorème IV. — *L'intégration d'un système normal de n équations avec seconds membres se ramène à celle du système sans seconds membres et à n quadratures.*

Considérons le système complet

$$(9)\qquad \begin{cases} x' + ax + by + \cdots = \mathrm{T}, \\ y' + a_1x + b_1y + \cdots = \mathrm{T}_1, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

et supposons connues les intégrales générales du système (**7**) :

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{C}_1x_1 + \mathrm{C}_2x_2 + \cdots \\ y = \mathrm{C}_1y_1 + \mathrm{C}_2y_2 + \cdots \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

On peut aussi considérer, dans ces équations (**10**), $x, y, \ldots$ comme les intégrales du système (**9**), à condition de regarder $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$ comme des fonctions de t définies par ces équations. Mais alors $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$ doivent vérifier un autre système d'équations qu'on obtient en portant les valeurs (**10**) dans (**9**). Substituons ces valeurs, en observant : I° que les C

ont maintenant par rapport à t des dérivées (que nous désignerons avec des accents) et 2° que $x_1, y_1, \ldots$ sont des solutions des équations sans seconds membres. Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 C_1' + x_2 C_2' + \cdots = T, \\ y_1 C_1' + y_2 C_2' + \cdots = T_1, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

C'est un système de n équations, résoluble par rapport aux n dérivées C'. On en tire donc les n inconnues C par n quadratures.

THÉORÈME V. — *Si l'on connaît p solutions particulières d'un système linéaire normal sans seconds membres à n inconnues ($n > p$), l'intégration du système avec ou sans seconds membres se ramène à celle d'un système linéaire normal à $n - p$ inconnues et à des quadratures.*

Pour fixer les idées, considérons un système de quatre équations

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{l} x' + ax + by + cz + du = T, \\ y' + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = T_1, \\ z' + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = T_2, \\ u' + a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = T_3, \end{array}\right.$$

et supposons qu'on connaisse deux solutions indépendantes $(x_1, \ldots u_1)$ et $(x_2, \ldots u_2)$ du système sans seconds membres.

Pour intégrer le système (**11**), désignons par C_1, C_2, ζ, υ de nouvelles inconnues et faisons la substitution

$$\left\{\begin{array}{l} x = C_1 x_1 + C_2 x_2, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \zeta, \\ u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \upsilon. \end{array}\right.$$

Le système (**11**) se transformera dans le suivant, où les accents désignent toujours des dérivées par rapport à t :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 C_1' + x_2 C_2' + c\zeta + d\upsilon = T, \\ y_1 C_1' + y_2 C_2' + c_1\zeta + d_1\upsilon = T_1, \\ z_1 C_1' + z_2 C_2' + \zeta' + c_2\zeta + d_2\upsilon = T_2. \\ u_1 C_1' + u_2 C_2' + \upsilon' + c_3\zeta + d_3\upsilon = T_3. \end{array}\right.$$

Comme le déterminant $x_1 y_2 - x_2 y_1$ diffère de 0 par hypothèse, on peut résoudre les deux premières équations par rapport C_1' et à C_2' et porter les valeurs trouvées dans les deux équations suivantes. Le système est ramené à la forme normale

$$C_1' = A\zeta + B\upsilon + \tau, \qquad \zeta' = A_2\zeta + B_2\upsilon + \tau_2,$$
$$C_2' = A_1\zeta + B_1\upsilon + \tau_1, \qquad \upsilon' = A_3\zeta + B_3\upsilon + \tau_3.$$

Donc ζ et υ se déterminent par l'intégration d'un système normal à deux variables ; après quoi, C_1 et C_2 se tirent des deux premières équations par quadratures.

264. Systèmes adjoints. — Considérons les deux systèmes normaux à n inconnues :

$$(12)\ \begin{cases} x' + ax + by + \cdots = 0 \\ y' + a_1x + b_1y + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \qquad (13)\ \begin{cases} -X' + aX + a_1Y + \ldots = 0 \\ -Y' + bX + b_1Y + \cdots = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Ces deux systèmes sont dans une relation réciproque et chacun d'eux s'appelle l'*adjoint* de l'autre.

Pour mettre la liaison des deux systèmes en évidence, ajoutons les équations (12) et (13) respectivement multipliées par $X, Y, \ldots, -x, -y, \ldots$ Il vient, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$Xx' + Yy' + \cdots + xX' + yY' + \cdots = \frac{d}{dt}(Xx + Yy + \cdots) = 0$$

d'où

$$xX + yY + \cdots = \text{const.}$$

Théorème. — *L'intégration complète d'un des systèmes entraine celle de l'autre.*

En effet, si l'on connaît n solutions indépendantes du système (12), à savoir $(x_1, y_1 \cdots) \cdots (x_n, y_n \cdots)$. On a n équations :

$$(14) \qquad x_iX + y_iY + \cdots = C_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

et on en tire $X, Y, \ldots$ avec n constantes distinctes.

Si l'on connaissait seulement p solutions indépendantes du premier système, on aurait p relations de la forme (14) ; elles permettraient d'éliminer p des inconnues du système adjoint et de ramener, par conséquent, l'intégration de celui-ci, donc aussi l'intégration du premier système, à celle d'un système d'ordre $n - p$, mais avec seconds membres.

C'est une nouvelle démonstration du théorème V du n° précédent.

265. Remarque. — La plupart des théorèmes énoncés dans les trois premiers paragraphes du chapitre actuel et relatifs à une seule équation linéaire d'ordre n, peuvent se déduire de ceux des n[os] 263 et 264 en ramenant l'équation d'ordre n à un système d'équations du premier ordre. Il en résulte de nouvelles démonstrations de ces théorèmes que nous proposons comme un excellent exercice à faire.

CHAPITRE VII.

Equations linéaires aux dérivées partielles et aux différentielles totales.

---

§ 1. Formation d'équations aux dérivées partielles.

266. Définition. — On appelle équation aux dérivées partielles toute relation entre une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables indépendantes, leurs dérivées partielles du premier ordre ou d'un ordre plus élevé et enfin les variables elles-mêmes. Lorsque les dérivées qui figurent dans l'équation sont toutes du premier ordre, l'équation est dite du premier ordre. Pour nous faire une idée de l'origine de ces équations et, par suite, de la nature des fonctions qu'elles peuvent définir, nous allons d'abord rechercher les équations aux dérivées partielles de certaines surfaces.

267. Equation des surfaces cylindriques. — Une surface cylindrique est engendrée par une droite indéfinie MN, appelée génératrice, qui se meut parallèlement à une droite donnée, en s'appuyant constamment sur une ligne donnée AB, appelée directrice.

Soient

(1) $$x = az + \alpha, \qquad y = bx + \beta$$

les équations de la génératrice MN ; a et b sont des coefficients constants qui expriment que MN est toujours parallèle à la direction donnée ; α et β, des paramètres variables avec la position de la génératrice, mais liés par une relation qui exprime que MN rencontre AB.

En effet, soient

(2) $$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, x) = 0,$$

les équations de la directrice AB ; on exprimera que AB et MN se rencontrent en éliminant x, y, z entre (2) et (1), ce qui donnera une relation

(3) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \Phi(\alpha).$$

Pour obtenir l'équation du lieu de MN, il faut éliminer les paramètres α et β entre (1) et (3), ce qui donne

$$(4) \qquad y - bz = \Phi(x - az).$$

Cette équation, dans laquelle Φ désigne une fonction arbitraire, convient donc à toutes les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à une même droite donnée, quelle que soit la directrice. C'est l'équation en quantités finies des surfaces cylindriques.

Nous allons montrer que l'équation (4) est équivalente à une équation aux dérivées partielles qui ne renferme plus rien d'arbitraire. Pour cela, dérivons (4) par rapport à x, puis par rapport à y, en considérant z comme une fonction des deux variables indépendantes x et y, ayant pour dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = q$; on aura

$$-bp = \Phi'(x - az)(1 - ap), \qquad 1 - bq = \Phi'(x - az)(-aq),$$

et, en éliminant Φ',

$$(5) \qquad ap + bq = 1.$$

Cette équation, qui ne dépend plus de la fonction arbitraire Φ et qui a au moins la même généralité que l'équation (4), est l'équation aux dérivées partielles des surfaces cylindriques dont les génératrices ont une direction donnée. Elle exprime une propriété géométrique de ces surfaces, savoir que la normale au point (x, y, z) est perpendiculaire à la génératrice qui passe par ce point. En effet, les cosinus directeurs de ces deux droites sont respectivement proportionnels à p, q, -1 et a, b, 1.

L'équation (5) est une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. Nous exposerons dans un prochain paragraphe la méthode d'intégration de ces équations et nous prouverons alors que, réciproquement, toute surface dont l'ordonnée vérifie l'équation (5) est une surface cylindrique.

268. Equations des surfaces coniques. — Une surface conique est engendrée par une droite indéfinie MN, appelée génératrice, qui passe par un point fixe (a, b, c) appelé sommet, et qui s'appuie constamment sur une courbe donnée AB, appelée directrice.

Soient

$$(1) \qquad x - a = \alpha(z - c), \qquad y - b = \beta(z - c)$$

les équations d'une génératrice, α et β étant des paramètres variables

avec la position de cette droite. On exprime que la génératrice rencontre la directrice en éliminant x, y, z entre les équations de la génératrice et celles de la directrice, ce qui donne une relation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta = \Phi(\alpha).$$

On trouve l'équation du lieu en éliminant α, β entre (1) et (2), ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{y-b}{z-c} = \Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

Cette équation, dans laquelle Φ reste arbitraire, convient à toutes les surfaces coniques ayant pour sommet le point $(a, b. c)$. Pour trouver l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces, dérivons successivement (3) par rapport à x et à y, en regardant z comme une fonction de ces deux variables ; il viendra

$$\frac{-(y-b)p}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{z-c-p\,(x-a)}{(z-z)^2},$$

$$\frac{z-c-q\,(y-b)}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\frac{-(x-a)\,q}{(z-c)^2},$$

et, en éliminant Φ',

$$(4) \qquad (x-a)\,p + (y-b)\,q = (z-c).$$

Cette équation, qui ne renferme plus rien d'arbitraire, a la même généralité au moins que l'équation (3). C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques. Elle exprime une propriété géométrique de ces surfaces, à savoir que la normale au point (x, y, z) est perpendiculaire à la génératrice qui passe par ce point et dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $(x-a)$, $(y-b)$ et $(z-c)$. Nous prouverons plus loin que, réciproquement, toute surface dont l'ordonnée vérifie l'équation (4) est une surface conique.

269. Equations des surfaces conoïdes. — Une surface conoïde est engendrée par une génératrice rectiligne qui se meut parallèlement à un plan directeur donné, en rencontrant constamment une droite fixe et une courbe fixe, appelées *directrices* de la surface.

Prenons un plan parallèle au plan directeur pour plan des xy et la directrice rectiligne pour axe des z. Dans ce cas, les équations d'une génératrice sont de la forme

$$(1) \qquad z = \alpha, \qquad y = \beta x,$$

où α et β sont des paramètres variables avec la génératrice. Les

équations (1) sont celles d'une droite rencontrant l'axe des z, mais il reste à exprimer qu'elle rencontre aussi la directrice curviligne. Pour cela, on élimine x, y, z entre les équations (1) et celles de la directrice curviligne, ce qui donne une relation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \Phi(\beta).$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant α et β entre (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad z = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette équation, où Φ est arbitraire, est celle de toutes les surfaces conoïdes ayant même plan directeur et même directrice rectiligne. Pour trouver l'équation aux dérivées partielles correspondante, on différentie successivement (3) par rapport à x et à y, ce qui donne

$$p = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad q = \Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

d'où

$$(4) \qquad px + qy = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles du premier ordre a donc la même généralité au moins que l'équation (3). Nous démontrerons plus loin qu'elle lui est équivalente. C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces conoïdes.

270. Equation des surfaces de révolution. — Celles-ci sont engendrées en faisant tourner une courbe AB, appelée génératrice, autour d'une droite fixe OR.

Prenons l'origine O sur l'*axe de révolution* OR. Chaque point M de la génératrice AB décrit une circonférence dont le centre est sur OR et dont le plan est normal à cet axe : on peut considérer la surface comme le lieu de ces circonférences.

Soient

$$(1) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

les équations de l'axe OR ; un plan normal à cet axe aura pour équation

$$ax + by + cz = \alpha.$$

Les équations du cercle variable seront donc

$$(2) \qquad ax + by + cz = \alpha, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \beta,$$

car on peut le considérer comme l'intersection du plan normal à OR avec une sphère de centre O. Pour exprimer que ce cercle rencontre AB, il faut éliminer x, y, z entre les équations (2) et celles de AB, ce qui conduit à une relation

(3) $$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \Phi(\beta).$$

On obtient l'équation de la surface de révolution en éliminant α et β entre (2) et (3), ce qui donne

(4) $$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2).$$

C'est l'équation générale, en quantités finies, des surfaces de révolution autour de la droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; la fonction Φ reste arbitraire avec le choix de la directrice.

Pour obtenir l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces, on dérive successivement par rapport à x et à y, en considérant z comme une fonction. On trouve

$$a + cp = \Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(2x + 2zp),$$
$$b + cq = \Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(2y + 2zq),$$

et, en éliminant Φ',

(5) $$(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay.$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée, et la fonction arbitraire a disparu.

271. Remarque. — Si l'on intègre les équations aux dérivées partielles des surfaces précédentes, cette intégration devra donc réintroduire la fonction arbitraire que nous avons éliminée. On peut prévoir, d'après cela, que l'intégration des équations aux dérivées partielles aura pour effet d'introduire des fonctions arbitraires. Les théories que nous allons exposer vont confirmer cette prévision.

§ 2. Propriétés des déterminants fonctionnels.

272. Définition. — Soient $u_1, u_2, \dots u_n$ des fonctions du même nombre n de variables indépendantes $x_1, x_2, \dots x_n$, admettant des dérivées partielles premières continues. On donne, comme on le sait (nº 15), le nom de *déterminant fonctionnel* ou de *jacobien* au déterminant

$$J = \frac{d(u_1, u_2, \dots u_n)}{d(x_1, x_2, \dots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

273. Théorème I. — *Si l'une des fonctions u ci-dessus est constante, ou s'il existe une relation identique, ne contenant pas les variables x, entre deux ou plusieurs de ces fonctions, le déterminant fonctionnel* J *est identiquement nul.*

1° Si l'une des fonctions u est constante, tous les éléments de la ligne correspondante dans J seront nuls, donc $J = 0$.

2° S'il existe une relation entre plusieurs fonctions u, par exemple si u_1 est fonction de $u_2, u_3, \ldots$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \cdots \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial u_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc les éléments de la première ligne de J s'obtiennent en faisant la somme des éléments correspondants de la seconde ligne multipliés par $\frac{\partial u_1}{\partial u_2}$, de la troisième multipliés par $\frac{\partial u_1}{\partial u_3}$, ... et le déterminant est identiquement nul.

274. Théorème II. — *Considérons m fonctions* $u_1, u_2, \cdots u_m$ de n ($n \geqslant m$) *variables indépendantes* $x_1, x_2, \cdots x_n$. *Si le déterminant d'ordre* p ($p < m$)

$$\text{(1)} \qquad J_1 = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p)}{d(x_1, x_2, \cdots x_p)}$$

est différent de 0, *tandis que tous les déterminants d'ordre* $p+1$ *suivants, obtenus en prenant une fonction u et une variable x de plus :*

$$\text{(2)} \qquad J_{k,l} = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p, u_{p+k})}{d(x_1, x_2, \cdots x_p, x_l)} \qquad \begin{cases} k = 1, 2, \cdots m-p \\ l = p+1, p+2, \cdots n \end{cases}$$

sont identiquement nuls, les fonctions $u_1, u_2, \cdots u_p$ *sont indépendantes et les fonctions restantes* $u_{p-1}, u_{p+2}, \cdots$ *peuvent s'exprimer au moyen des premières.*

L'indépendance des fonctions $u_1, u_2, \cdots u_p$ se vérifie immédiatement, car, s'il existait une relation entre elles, elle subsisterait quand on ne fait varier que $x_1, x_2, \cdots x_p$, et J_1 serait nul en vertu du théorème précédent. Mais la seconde partie du théorème exige quelques préliminaires.

Observons d'abord que les déterminants $J_{k,l}$, qui sont nuls par hypothèse quand $l = p+1, p+2, \cdots n$, sont nuls aussi pour les

autres valeurs plus petites de l'indice l, car ils ont alors deux lignes égales.

Développons $J_{k,l}$ suivant les éléments de la dernière colonne, il vient, pour $l = 1, 2, \cdots n$,

$$J_{k,l} = A_k \frac{\partial u_1}{\partial x_l} + B_k \frac{\partial u_2}{\partial x_l} + \cdots + P_k \frac{\partial u_p}{\partial x_l} + J_1 \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} = 0 ;$$

et il est essentiel d'observer que les mineurs A_k, B_k, $\cdots$ P_k dépendent de l'indice k seulement et non de l.

Ceci posé, considérons les $p+1$ équations qui déterminent du_1, $du_2, \cdots du_p$ et une différentielle totale de plus du_{p+k} :

$$du_1 = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_l} dx_l, \quad \cdots \quad du_p = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial x_l} dx_l, \quad du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_{p+k}}{\partial x_l} dx_l ;$$

ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par les mineurs A_k, $\cdots$ P_k et J_1. Il viendra identiquement, $J_{k,l}$ étant nul,

$$A_k\, du_1 + B_k\, du_2 + \cdots + P_k\, du_p + J_1\, du_{p+k} = \sum_{l=1}^{n} J_{k,l}\, dx_l = 0.$$

Cette identité conduit aisément à la démonstration du théorème.

Associons aux fonctions indépendantes $u_1, \cdots u_p$ de nouvelles fonctions $v_{p+1}, v_{p+2}, \cdots v_n$, de manière à former un système de n fonctions indépendantes, et prenons celles-ci comme variables indépendantes au lieu des x. On tire de la relation précédente, J_1 n'étant pas nul,

$$du_{p+k} = -\frac{A_k\, du_1 + B_k\, du_2 + \cdots + P_k\, du_p}{J_1}$$

et cette relation entre différentielles premières, étant indépendante du choix des variables (t. 1[er], n° 157), subsiste pour les variables indépendantes $u_1, \cdots u_p$, $v_{p+1}, \cdots v_n$. Donc, si on la compare à l'expression générale de du_{p+k}, qui est

$$\frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial u_p} du_p + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+1}} dv_{p+1} + \cdots + \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_n} dv_n ,$$

on en tire les identités

$$\frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+1}} = \frac{\partial u_{p+k}}{\partial v_{p+2}} = \cdots = 0.$$

Donc u_{p+k} ne dépend que de $u_1, u_2, \cdots u_p$. On voit pareillement que, si un ou plusieurs des coefficients A_k, B_k, $\cdots$ étaient nuls, u_{p+k} ne dépendrait même plus que d'une partie de ces fonctions.

275. Remarques. — I. Dans la démonstration précédente, on peut prendre, en particulier, $x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots x_n$ comme variables v, car, le déterminant

$$\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p, x_{p+1}, \cdots x_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_p, x_{p+1}, \cdots x_n)} = \frac{d(u_1, \cdots u_p)}{d(x_1, \cdots x_p)}$$

n'étant pas nul, les variables $u_1, \cdots u_p, x_{p+1}, \cdots x_n$ sont indépendantes.

II. Sous les conditions du théorème précédent, $p+1$ quelconques des fonctions $u_1, \cdots u_m$ n'étant pas indépendantes, leur déterminant fonctionnel par rapport à $p+1$ quelconques des variables x est identiquement nul. Il est à remarquer que les déterminants $J_{k,l}$, énumérés dans l'énoncé du théorème II, ne sont qu'une partie des déterminants qu'on peut ainsi former. Donc l'évanouissement de ceux-ci entraîne celui des autres.

276. Théorème III. — *Soient m fonctions $u_1, u_2, \cdots u_m$ d'un nombre égal ou supérieur n de variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots x_n$. La condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions soient indépendantes entre elles, c'est-à-dire pour qu'aucune ne soit constante et qu'elles ne satisfassent pas à une relation indépendante des variables x, est que l'un au moins des déterminants fonctionnels qu'on peut former avec m colonnes du tableau :*

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

ne soit pas identiquement nul. En particulier, si les u et les x sont en même nombre n, cette condition sera que le déterminant fonctionnel J des n fonctions u par rapport aux n variables x, ne soit pas identiquement nul.

La condition est suffisante, c'est-á-dire que, si l'un de ces déterminants, par exemple

$$\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_m)}{d(x_1, x_2, \cdots x_m)}$$

est différent de 0, il n'existe aucune relation entre les u. En effet, s'il existait une relation entre les u, ce déterminant serait nul (nº 273).

La condition est nécessaire, c'est-à-dire que, si ces déterminants sont nuls, il existe une relation entre les u.

En effet, 1° si toutes les dérivées partielles des u sont nulles, les u sont constants. 2° Dans le cas contraire, soit p $(1 \leqslant p < m)$ l'ordre maximum des déterminants différents de 0 qu'on peut former par la combinaison de lignes et de colonnes du tableau ; soit, par exemple,

$$\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_p)}{d(x_1, x_2, \cdots x_p)}$$

un déterminant non nul d'ordre maximum, alors $u_{p+1}, \cdots u_n$ sont fonctions de u_1, u_2, $\cdots u_p$ par le théorème II (n° 274).

§ 3. Equations linéaires et homogènes aux dérivées partielles.

277. Remarque préliminaire. — Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, on a surtout en vue de ramener leur intégration à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires. Le problème ainsi posé est complètement résolu pour les équations du 1er ordre, mais nous nous occuperons seulement ici des équations linéaires.

278. Théorie des équations linéaires et homogènes. — Considérons d'abord l'équation *linéaire et homogène*

$$(1) \qquad X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0.$$

Si l'on définit le symbole X par la formule

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

l'équation (1) se met sous la forme abrégée, souvent commode,

$$X(z) = 0.$$

On suppose que X_1, X_2, $\cdots X_n$ sont des fonctions données et z une fonction inconnue des n variables indépendantes x_1, x_2, $\cdots x_n$, que la fonction inconnue z n'entre pas dans les coefficients X et qu'un au moins de ces coefficients n'est pas identiquement nul. Nous admettrons que c'est X_1.

Posons le système d'*équations différentielles ordinaires*

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

et considérons un domaine dans lequel les rapports $X_2 : X_1$, $X_3 : X_1$, $\cdots$ et leurs dérivées partielles premières restent continues. Prenons x_1 comme variable indépendante ; les équations (2) admettent un sys-

tème de solutions dépendant de $n - 1$ constantes arbitraires *distinctes* $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ et de la forme (n°, 178 2°)

$$x_2 = \varphi_2(x_1, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n), \quad x_3 = \varphi_3(x_1, \alpha_1, \cdots), \quad \cdots \quad x_n = \varphi_n(x_1, \alpha_1, \cdots).$$

Résolvons ce système d'équations par rapport aux constantes arbitraires ; il viendra

$$(3) \qquad u_1 = \alpha_1, \quad u_2 = \alpha_2, \quad \cdots \quad u_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

en désignant par $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ des fonctions connues de $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Nous allons établir que de la connaissance de ces fonctions on peut immédiatement déduire toutes les intégrales de l'équation (1) et que l'intégration du système (2) ou de l'équation (1) sont deux problèmes complètement équivalents.

Nous commencerons par donner une définition qui facilite le langage :

Définition. — En vertu des formules (3), chacune des fonctions u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$ demeure constante quand $x_1, x_2, \ldots x_n$ varient de manière à vérifier les équations (2). Une fonction qui ne se réduit pas identiquement à une constante et qui possède ces propriétés s'appelle *une intégrale* des équations (2). Deux intégrales sont *distinctes* quand il n'existe pas de relation entre elles. Donc, quand on a intégré les équations (2), on connaît $n - 1$ intégrales distinctes $u_1, u_2, \ldots$ de ces équations, car, comme on peut les égaler respectivement à autant de constantes arbitraires distinctes, il ne peut exister de relations entre elles.

Théorème I. — *Toute intégrale du système* (2) *dans le sens précédent est une intégrale de l'équation* (1),

En effet, soit u une intégrale de (2) ; quand les x vérifient les équations (2), on a, par définition,

$$(4) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0 ;$$

d'où, en éliminant les dx,

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2 + \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n} X_n = 0.$$

Cette équation est *identique*, car elle a lieu pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ vérifiant les équations (2), donc pour un système de valeurs particulières quelconques, car celui-ci peut être choisi comme système de valeurs initiales. Donc u est une intégrale de (1).

Théorème II. — *Réciproquement, toute intégrale de l'équation* (**1**) *est une intégrale du système* (**2**).

En effet, soit u une intégrale de (**1**) ; elle vérifie l'équation (**5**) ; et, les x variant conformément aux équations (**2**), on peut remplacer dans (**5**) les X par des quantités proportionnelles dx et on obtient l'équation (**4**). Donc, du étant nul, u demeure constant et c'est une intégrale du système (**2**).

Théorème III. — *L'équation* (**1**) *ou le système* (**2**) *admettent* $n-1$ *intégrales distinctes* $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$; *toutes les autres intégrales sont comprises dans la formule* $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$, *la fonction* φ *restant arbitraire.*

En effet, soient $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ les $n-1$ intégrales distinctes obtenues par l'intégration du système (**2**). Ajoutons leur une nouvelle intégrale quelconque u_n ; nous aurons n identités

$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

d'où, en éliminant les X (qui ne sont pas tous nuls),

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots x_n)} = 0.$$

Cette identité prouve (n° 276) qu'il existe une relation au moins entre les u ; mais, comme il n'y en a pas entre $u_1, \ldots u_{n-1}$, il vient nécessairement

$$u_n = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}).$$

Réciproquement, quelle que soit la fonction dérivable φ, toute expression de cette forme, demeurant constante avec $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, est une intégrale du système (**2**), donc de l'équation (**1**).

Il résulte de là que, si l'on a intégré le système (**2**), on connaît l'intégrale générale de (**1**).

La réciproque est vraie. Si l'on connaît l'intégrale générale de (**1**), on en connaît $(n-1)$ intégrales distinctes. En égalant celles-ci à des constantes arbitraires, on aura intégré le système (**2**).

De là, la règle suivante pour intégrer l'équation (**1**) :

Règle. — *Pour intégrer l'équation* (**1**), *on pose le système auxiliaire* (**2**), *qui est un système d'équations différentielles ordinaires. En l'intégrant, on obtient* $n-1$ *relations qu'on résout par rapport aux* $n-1$ *constantes d'intégration. Les* $n-1$ *fonctions* $u, u_2, \ldots u_{n-1}$ *qui demeurent constantes sont des intégrales de l'équation* (**1**) *et l'intégrale générale sera*

$$z = \varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}),$$

la fonction (dérivable) φ restant arbitraire. Il n'y a pas d'autre solution.

Par exemple, pour intégrer l'équation des conoïdes $px + qy = 0$ (nº 269), on pose l'équation auxiliaire

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y}{x} = \alpha.$$

L'intégrale générale cherchée sera $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Théorème IV. — *Si l'on connaît k intégrales distinctes de l'équation linéaire à n variables indépendantes* ($k < n$)

$$X(z) = X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire à $n - k$ *variables indépendantes.*

Soient $y_1, y_2, \ldots y_k$ les intégrales connues. Ajoutons-y $n - k$ nouvelles fonctions $y_{k+1}, \ldots y_n$ formant avec les précédentes un système de fonctions distinctes et prenons-les comme nouvelles variables à la place des x. Comme on a, par la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y_n},$$

l'équation transformée sera

$$X(z) = (Xy_1)\frac{\partial z}{\partial y_1} + (Xy_2)\frac{\partial z}{\partial y_2} + \cdots + (Xy_n)\frac{\partial z}{\partial y_n} = 0.$$

Pour calculer (Xy), on suppose d'abord y exprimé en fonction des x pour effectuer l'opération X et, cette opération faite, on revient aux variables y.

Mais, dans le cas actuel, $y_1, y_2, \ldots y_k$ étant des intégrales de $X(z) = 0$, l'équation transformée se réduit à

$$(Xy_{k+1})\frac{\partial z}{\partial y_{k-1}} + \cdots + (Xy_n)\frac{\partial z}{\partial y_n} = 0.$$

Cette équation ne contient plus de dérivées en $y_1, y_2, \ldots y_k$. On peut donc y considérer ces variables comme des paramètres arbitraires et l'équation elle-même comme une équation à $n - k$ variables indépendantes. Son intégration revient à celle du système de $n - k - 1$ équations simultanées ordinaires :

$$\frac{dy_{k+1}}{(Xy_{k+1})} = \cdots = \frac{dy_n}{(Xy_n)},$$

renfermant les paramètres constants $y_1, \ldots y_k$.

279. Théorie des multiplicateurs. — DÉFINITION. — Représentons encore par $X(z)$ le premier membre de l'équation (1). Jacobi appelle *multiplicateur* de l'équation $X(z) = 0$, ou multiplicateur de $X(z)$, un facteur M, fonction de $x_1, x, \ldots x_n$, tel que le produit $MX(z)$ puisse se mettre sous la forme d'un déterminant fonctionnel, c'est-à-dire tel qu'on ait identiquement

$$MX(z) = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

les $n - 1$ fonctions u des variables x étant connues.

THÉORÈME I. — *Toute équation linéaire et homogène* $X(z) = 0$ *admet un multiplicateur* M.

En effet, soient $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ un système de $n - 1$ intégrales distinctes de l'équation $X(z) = 0$. Comme X_1 n'est pas nul et que, par suite, x_1 n'est pas une intégrale de $X(z) = 0$ ($X(z)$ se réduisant à X_1 pour $z = x_1$), les fonctions $x_1, u_1, \cdots u_{n-1}$ sont indépendantes, par conséquent, le déterminant δ_1 suivant

$$\delta_1 = \frac{d(x_1, u_1, u_2 \ldots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)} = \frac{d(u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_2, \cdots x_n)}$$

n'est pas identiquement nul.

Considérons le système de n identités, linéaires en $X_1, X_2, \cdots X_n$,

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = X(z),$$
$$X_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u_i}{\partial x_n} = 0,$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

dont la première sert de définition à $X(z)$ et les autres expriment que les u sont des intégrales de l'équation (1). Multiplions-les respectivement par les mineurs $\delta_1, \delta_2, \cdots$ relatifs aux éléments de la première colonne du déterminant du système, qui n'est autre que le déterminant fonctionnel

$$\frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

et ajoutons. Il vient identiquement

$$X_1 \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)} = \delta_1 X(z).$$

Comme d'ailleurs δ_1 n'est pas nul, le déterminant fonctionnel ne peut être identiquement nul non plus. On voit donc que $\delta_1 : X_1$, qui ne contient pas z, est un multiplicateur M de $X(z)$.

Théorème II. — *Si l'expression*

$$X(z) = X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

est elle-même un déterminant fonctionnel, à savoir

$$\frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)},$$

on aura identiquement

$$(6) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

On a, en effet,

$$X_1 = \frac{d(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_2, x_3, \cdots x_n)}, \qquad X_2 = -\frac{d(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_3, \cdots x_n)}, \ldots$$

Donc l'expression (**6**) est linéaire par rapport aux dérivées secondes de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ des fonctions u. Je dis que chacune de ces dérivées a pour coefficient zéro : il suffit de l'établir pour l'une d'elles, $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ par exemple. Celle-ci ne se trouvera que dans les deux premiers termes de (**6**), savoir

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{d(u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_3, \cdots x_n)} + \cdots\right]$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{d(u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_3, \cdots x_n)} + \cdots\right]$$

Donc les deux coefficients de $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ se détruisent.

Théorème III. — *Réciproquement, si l'on a identiquement*

$$(6) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

$X(z)$ *est un déterminant fonctionnel.*

En effet, soit M le multiplicateur $\delta_1 : X_1$ de $X(z)$ obtenu dans la démonstration du théorème I ; $MX(z)$ sera le déterminant fonctionnel :

$$(7) \qquad MX(z) = \frac{d(z, u_1, u_4, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)}$$

considéré dans cette même démonstration ; et l'on aura, en vertu du théorème II,

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Mais cette identité se réduit, en vertu de (6), à la relation

$$X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial M}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n} = X(M) = 0.$$

Donc, M étant une intégrale de $X(z) = 0$, on peut poser

$$M = \varphi(u_1, u_2, \cdots u_{n-1}).$$

Déterminons par une quadrature une fonction U_{n-1} de $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ qui soit une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial U_{n-1}}{\partial u_{n-1}} = \frac{1}{M} = \frac{1}{\varphi(u_1, u_2, \cdots u_{n-1})};$$

cette équation peut encore s'écrire, en considérant z comme une variable indépendante des u,

$$\frac{1}{M} = \frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-2}\, U_{n-1})}{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-2}\, u_{n-1})};$$

et la relation (7) devient ainsi, par les propriétés des jacobiens (n° 15)

$$X(z) = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, U_{n-1})}{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, u_{n-1})} \frac{d(z, u_1, u_2, \cdots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n)}$$

$$X(z) = \frac{d(z, u_1, \cdots u_{n-2}, U_{n-1})}{d(x_1, x_2, \cdots x_{n-1}, x_n)}.$$

Donc $X(z)$ est un déterminant fonctionnel.

Les théorèmes II et III conduisent à la conclusion suivante :

Théorème IV. — *Les multiplicateurs de* $X(z) = 0$ *sont les intégrales de*

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Théorème V. — *Si l'on connait un multiplicateur* μ *de* $X(z) = 0$, *on obtient tous les autres en multipliant* μ *par l'intégrale générale* z *de* $X(z) = 0$.

En effet, si l'on substitue $M = \mu z$ dans l'équation précédente, qui est celle des multiplicateurs, il vient, pour déterminer z,

$$z \left[\frac{\partial \mu X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu X_2}{\partial x_2} + \cdots \right] + \mu \left[X_1 \frac{\partial z}{\partial x} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots \right] = 0$$

et, le premier crochet étant nul, cette équation se réduit à $X(z) = 0$.

280. Addition d'une nouvelle variable indépendante. — Souvent,

pour plus de symétrie, on remplace le système des équations (**1**) et (**2**) par le système correspondant, contenant une variable t en plus :

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + X(z) = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

L'équation (I) se réduit à (**1**) pour z indépendant de t; les intégrales $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ de (**1**) sont donc les $n-1$ intégrales distinctes du nouveau système qui sont indépendantes de t et il n'y en a pas davantage. Pour achever l'intégration, il faut donc trouver une dernière intégrale contenant t. *Cette détermination n'exige qu'une quadrature.*

En effet, considérons le système (II) ; on en tire

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx_1}{X_1}.$$

L'intégration se fait en remplaçant dans X_1 les variables $x_2, x_3, \ldots x_n$ par leurs valeurs en fonction de x_1 fournies par l'intégration du système (**2**), c'est-à-dire tirées de $u_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots n-1$). Puis, l'intégration faite, on remplace les constantes α_i par leurs valeurs en $x_1, \ldots x_n$, ce qui donne

$$t - t_0 = u_n(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

On obtient ainsi la dernière intégrale cherchée $u_n - t$. La détermination de u_n n'exige, comme on le voit, qu'une quadrature quand $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ sont connus.

Théorème. — *Quand on a calculé u_n, on connait un multiplicateur de* X(z) *qui a la forme d'un déterminant fonctionnel, à savoir*

$$M = \frac{d(u_1, u_2, \ldots u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

En effet, formons le multiplicateur M de l'équation (I) par la méthode indiquée pour l'équation (**1**) dans la démonstration du théorème du n° 279, mais en faisant jouer maintenant à t le rôle de x_1. Ainsi nous devons remplacer X_1 par l'unité, δ_1 par le déterminant

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots u_n - t)}{d(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{d(u_1, u_2, \ldots u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots x_u)},$$

et nous trouvons le multiplicateur **M**, indépendant de t,

$$M = \frac{d(u_1, u_2, \ldots u_n)}{d(x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

lequel vérifie l'identité

$$M\left(\frac{\partial z}{\partial t}+Xz\right)=\frac{d(z, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n - t)}{d(t, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}.$$

Pour revenir à l'équation (1), supposons z indépendant de t. Alors, t n'entrant ni dans z ni dans u, tous les éléments de la première colonne de ce dernier déterminant sont nuls, sauf le dernier qui est -1. La relation se réduit à

$$MX(z) = \pm \frac{d(z, u_1, u_2, \ldots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)} = \frac{d(z, \pm u_1, \ldots u_{n-1})}{d(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)}.$$

Donc M est un multiplicateur de $X(z)$. On remarquera que c'est, au signe près, le même que celui que nous avons déterminé pour établir le théorème I du n° 279.

281. Changement de variables. — *Si l'on fait un changement de variables remplaçant* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *par* $y_1, y_2, \ldots y_n$ *et qu'on connaisse un multiplicateur* M *de* $X(z) = 0$, *on peut en déduire un multiplicateur* M' *de l'équation transformée en* y, *que nous représentons par* $Y(z) = 0$.

En effet, $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ et $u_n - t$, exprimés à l'aide des x ou des y, sont respectivement les intégrales des équations :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + X(z) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} + Y(z) = 0.$$

Les multiplicateurs indépendants de t des deux équations ont respectivement pour expressions générales (n°s 280 et 279, V) :

$$M = \frac{d(u_1, \ldots u_n)}{d(x_1, \ldots x_n)}\varphi(u_1, \ldots u_{n-1}), \qquad M' = \frac{d(u_1, \ldots u_n)}{d(y_1, \ldots y_n)}\varphi(u_1, \ldots u_{n-1}).$$

Ce sont aussi les expressions générales des multiplicateurs de $X(z)$ et $Y(z)$. Considérons ceux qui correspondent à la même fonction φ ; on aura, en divisant membre à membre, et par les propriétés des déterminants fonctionnels,

$$M' = M\frac{d(x_1, x_2, \ldots x_n)}{d(y_1, y_2, \ldots y_n)}.$$

Donc on peut calculer M' quand on connaît M.

282. Principe du dernier multiplicateur de Jacobi. — *Si l'on connaît* $n - 2$ *intégrales distinctes de* $X(z) = 0$ *et un multiplicateur, l'intégration de cette équation se ramène à des quadratures.*

En effet, si l'on prend comme nouvelles variables les $n - 2$ intégrales

connues $u_1, u_2, \ldots u_{n-2}$ et deux variables indépendantes y_1 et y_2, le système (**2**) se transforme dans celui-ci :

$$\frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{0} = \ldots = \frac{du_{n-2}}{0} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2},$$

auquel correspond l'équation aux dérivées partielles

$$Y(z) = Y_1 \frac{\partial z}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial z}{\partial y_2} = 0.$$

Par hypothèse, eu égard au théorème précédent, on en connaît un multiplicateur M, et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(MY_1) + \frac{\partial}{\partial y_2}(MY_2) = 0.$$

Or ceci exprime que M est un facteur intégrant de la dernière équation à intégrer :

$$Y_2\,dy_1 - Y_1 dy_2 = 0\,;$$

l'intégration s'achèvera donc par des quadratures.

Remarque. — Il arrive souvent dans les applications que l'on a $\Sigma \dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$, alors $M = 1$ est un multiplicateur, et on peut appliquer le théorème précédent.

L'équation de Jacobi, $y'' = f(x, y)$, en est un exemple. Elle revient au système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{f}$$

et l'on a, chaque terme étant lui-même nul,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial 1}{\partial x} = 0.$$

Donc le système s'intègre par des quadratures quand on en connaît une intégrale première, comme nous l'avons déjà vu (n° 250).

§ 4. Equations linéaires quelconques.

283. Equation aux dérivées partielles linéaire de la forme générale. — Soit z une fonction inconnue de $x_1, x_2, \cdots x_n$. Désignons par $p_1, p_2, \cdots p_n$ les dérivées de z par rapport à chacune de ces variables. Soient enfin $X_1, X_2, \cdots X_n$ et Z des fonctions données de $x_1, \cdots x_n$ et z, continues ainsi que leurs dérivées premières, l'une au moins X_1 des fonctions X n'étant pas identiquement nulle.

L'équation linéaire la plus générale est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n = Z$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad Z - X_1 p_1 - X_2 p_2 - \cdots X_n p_n = 0.$$

Règle d'intégration. — *Pour intégrer cette équation, on pose le système auxiliaire d'équations différentielles ordinaires*

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}.$$

On intègre ce système, et en résolvant par rapport aux constantes arbitraires, on obtient le système de ses n intégrales distinctes :

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots x_n, z) = \alpha_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots n)$$

L'intégrale générale de l'équation (1) *est la fonction implicite z définie par la relation*

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) = 0,$$

F *désignant une fonction (dérivable) arbitraire. Exceptionnellement, il peut y avoir une solution singulière ne rentrant pas dans la précédente, mais ne contenant rien d'arbitraire.*

Démonstration. — Nous allons établir ce théorème en suivant, sauf quelques modifications, la méthode de Gilbert, qui ne laisse échapper aucune solution. Elle consiste à mettre le premier membre de l'équation (1) sous forme de déterminant fonctionnel.

Désignons, en abrégé, par R le premier membre de l'équation (1) et considérons le système de relations, linéaires en $X_1, X_2, \cdots X_n, Z$:

$$(3) \qquad \begin{cases} R = Z - X_1 p_1 - X_2 p_2 - \cdots - X_n p_n \\ 0 = Z \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z} + X_1 \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + X_2 \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + \cdots + X_n \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \\ \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \end{cases}$$

Ce sont des *identités* par rapport aux variables z, x, p, dont la première sert de définition à R et les suivantes expriment que les φ sont des intégrales de (2). Le déterminant Δ du système (3) n'est pas identiquement nul, car, si on le développe par rapport aux éléments de la première ligne, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -p_1 & \cdots & -p_n \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \delta - p_1 \delta_1 - p_2 \delta_2 - \cdots - p_n \delta_n$$

et les mineurs $\delta, \delta_1, \cdots \delta_n$ sont des fonctions explicites de $x_1, \cdots x_n$ et z seulement, dont l'une au moins n'est pas nulle, puisque les n fonctions φ sont indépendantes (n° 276, théorème III).

D'autre part, je dis que Δ peut se mettre sous forme de déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)},$$

à condition de calculer les dérivées partielles des φ en considérant z comme fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$. En effet, on peut ajouter aux éléments de la deuxième colonne, puis à ceux de la troisième,... les éléments de la première multipliés par p_1, puis par $p_2, \ldots$ Il vient ainsi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

et, par conséquent,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial\varphi_n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ce qui est bien un déterminant fonctionnel calculé en considérant z comme fonction des x.

Si l'on veut tirer X_1 du système (3), il faut en multiplier respectivement les équations par les mineurs de Δ relatifs aux coefficients de X_1 et ajouter. Le premier de ces mineurs étant δ_1, il vient ainsi $R\delta_1 = X_1 \Delta$. Donc δ_1 n'est pas identiquement nul, puisque X_1 et Δ ne le sont pas ; et nous avons l'identité

$$R = \left(\frac{X_1}{\delta_1}\right) \Delta = \left(\frac{X_1}{\delta_1}\right) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)}.$$

L'équation proposée $R = 0$ est donc identique, à un facteur près, à

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \cdots x_n)} = 0.$$

Sous cette forme, elle exprime que la fonction z de $x_1, \cdots x_n$ doit être choisie de telle façon qu'il existe entre les fonctions φ une rela-

tion indépendante des variables x. Par conséquent, pour qu'une fonction z vérifie l'équation (1), il faut et il suffit qu'elle soit comprise dans la relation $F(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) = 0$.

Les seules solutions qui puissent échapper à cette relation doivent annuler le facteur négligé $X_1 : \delta_1$, lequel est une fonction explicite de $x_1, \cdots x_n$ et z. Donc, si l'on peut tirer une valeur de z de la relation $X_1 : \delta_1 = 0$, ce sera une solution ne contenant rien d'arbitraire. On lui donne le nom de *solution singulière.*

Quand elle existe, la solution singulière peut se trouver sans intégration. En effet, nous venons de montrer qu'elle doit annuler tout facteur X_1 qui n'est pas identiquement nul. Par conséquent, elle doit annuler tous les coefficients X_1, $X_2 \cdots Z$ de l'équation (1) et, s'il existe une fonction z satisfaisant à cette condition, ce sera évidemment une intégrale et on la trouvera sans intégration.

284. Equation à trois variables. Interprétation géométrique. Caractéristiques. — Lorsque la fonction inconnue z ne dépend que de deux variables indépendantes x, y, l'équation (1) se réduit à la forme

$$Pp + Qq = R, \tag{I}$$

où p, q désignent les dérivées partielles de z par rapport à x et à y et P, Q, R des fonctions données de x, y, z. Dans ce cas, la méthode générale d'intégration est susceptible d'une interprétation géométrique importante.

Toute intégrale $z = \varphi(x, y)$ définit une *surface intégrale* S, dont le plan tangent a pour équation

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

L'équation (I) exprime que ce plan tangent contient la droite D ayant pour équations

$$\frac{\xi - x}{P} = \frac{\eta - y}{Q} = \frac{\zeta - z}{R}. \tag{D}$$

A chaque point M(x, y, z) de l'espace correspond une droite D passant par ce point et que nous appellerons la *droite du point* M. Le problème d'intégrer l'équation (I) peut alors être posé dans les termes suivants : *Déterminer une surface* S *telle que le plan tangent en chaque point contienne la droite* D *du point de contact.*

Appelons *caractéristique* une courbe qui touche en chaque point la droite D du même point. Les caractéristiques seront définies par le

système d'équations différentielles ordinaires, qui correspond au système (**2**) du cas général :

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Les caractéristiques sont les *courbes intégrales* de ce système. Sous forme finie, elles sont donc définies par deux intégrales distinctes du système (II), telles que

$$\text{(III)} \qquad \varphi(x, y, z) = a, \qquad \psi(x, y, z) = b.$$

Ces équations sont celles d'une famille de courbes à deux paramètres arbitraires a et b : c'est ce que l'on appelle une *congruence de courbes*.

D'abord il est clair que toute surface lieu de caractéristiques est une intégrale de l'équation (I), car le plan tangent contient la tangente à la caractéristique passant par le point de contact, donc la droite (D).

Mais, réciproquement, toute intégrale est un lieu de caractéristiques. En effet, la règle d'intégration revient à poser, entre les paramètres a et b, une relation arbitraire

$$F(a, b) = 0,$$

et à éliminer les paramètres a et b entre cette relation et les équations (III). Cela revient à former un lieu de caractéristiques.

Il ne peut y avoir d'exception que si P, Q, R s'annulent le long de l'intégrale, mais, dans ce cas, la droite D n'existe plus.

Problème de Cauchy. — Le problème de Cauchy consiste à déterminer la surface intégrale passant par une courbe donnée C. Les considérations précédentes permettent de montrer que ce problème admet une solution et une seule, pourvu que la courbe C ne soit pas une caractéristique.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point variable de la courbe C, définie par les équations

$$\text{(IV)} \qquad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

La surface intégrale cherchée sera le lieu des caractéristiques passant par les points (x_0, y_0, z_0). Les équations de ces caractéristiques seront, d'après les formules (III),

$$\text{(V)} \qquad \varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0), \qquad \psi(x, y, z) = \psi(x_0, y_0, z_0).$$

L'équation de la surface intégrale s'obtiendra en éliminant x_0, y_0, z_0 entre les quatre équations précédentes.

En particulier, si l'on suppose la courbe (C) dans le plan yz, le problème revient à trouver l'intégrale z qui se réduit à une fonction arbitraire $f(y)$ pour $x = 0$. On l'obtiendra en éliminant z_0 et y_0 entre les trois équations

$$z_0 = f(y_0) \quad \varphi(x, y, z) = \varphi(0, y_0, z_0), \quad \psi(x, y, z) = \psi(0, y_0, z_0).$$

Remarque. — Dans le cas d'un nombre quelconque $n + 1$ de variables $z, x_1, \ldots x_n$, la représentation géométrique fait défaut, mais on étend la terminologie précédente au cas général.

On dit que le système des intégrales générales des équations (2) définit une famille de *courbes intégrales* dépendant de n paramètres arbitraires. Ces courbes intégrales s'appellent les *caractéristiques* de l'équation (1). Toute intégrale de (1) est un lieu de caractéristique et la détermination de ces intégrales revient à celle des caractéristiques.

Le *problème de Cauchy* consiste à trouver l'intégrale passant une multiplicité donnée à $n - 1$ dimensions, c'est-à-dire définie par deux relations entre les variables z et x. Ce problème admet une solution et une seule pourvu que cette multiplicité ne soit pas formée de caractéristiques. En particulier, on peut chercher l'intégrale z qui se réduit à une fonction arbitraire $f(x_2, x_3, \ldots x_n)$ pour $x_1 = 0$, ce qui suppose que le plan $x_1 = 0$ ne soit pas lui-même un lieu de caractéristiques. Ces problèmes se traitent exactement comme dans le cas précédent.

285. Exemples. — I. *L'équation des surfaces cylindriques* est (n° 267)

$$ap + bq = 1.$$

Les équations différentielles des caractéristiques sont :

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x - az = \alpha, \\ y - bz = \beta. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont des droites parallèles. L'intégrale générale sera

$$F(x - az, y - bz) = 0.$$

II. *L'équation des surfaces coniques* est (n° 268)

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c.$$

Les caractéristiques ont pour équations :

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}, \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x-a}{z-c} &= \alpha, \\ \frac{y-b}{z-c} &= \beta. \end{aligned} \right.$$

Ce sont des droites passant par le point (a, b, c). L'intégrale générale sera

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0.$$

III. *L'équation des surfaces de révolution* est (nº 270)

$$(cy - bz)p + (az - cx)q = bx - ay.$$

Le système des équations des caractéristiques est :

$$\frac{dx}{cy-bz} = \frac{dy}{az-cx} = \frac{dz}{bx-ay}.$$

On le ramène à un système linéaire en égalant ces rapports à la différentielle dt d'une nouvelle variable. Il vient

$$dx = (cy - bz)dt, \qquad dy = (az - cx)dt, \qquad dz = (bx - ay)dt.$$

On en tire deux combinaisons immédiatement intégrables :

$$\left\{ \begin{aligned} x dx + y dy + z dz &= 0, \\ a dx + b dy + c dz &= 0. \end{aligned} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \alpha, \\ ax + by + cz &= \beta. \end{aligned} \right.$$

Les caractéristiques sont des cercles définis par ces deux dernières équations. L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles sera

$$F(x^2 + y^2 + z^2, ax + by + cz) = 0.$$

§ 5. Intégration d'une seule équation aux différentielles totales.

286. Intégrabilité complète. — Considérons d'abord l'équation à trois variables

$$(1) \qquad dz = X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy,$$

dans laquelle x et y sont des variables indépendantes, z une fonction inconnue de ces deux variables, enfin X et Y des fonctions *continues* données de x, y et z.

C'est une *équation aux différentielles totales*. On dit qu'elle est *com-*

plètement intégrable, si elle admet une intégrale renfermant une constante arbitraire, en d'autres termes, s'il existe une relation unique

$$z = \varphi(x, y, \alpha), \tag{2}$$

renfermant une arbitraire α, dont l'équation (1) soit la conséquence.

287. Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit complètement intégrable est que l'on ait, identiquement* (x, y *et* z *restant donc arbitraires*),

$$\frac{\partial X}{\partial y} + Y\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} + X\frac{\partial Y}{\partial z}\cdot \tag{3}$$

On suppose l'existence et la continuité des quatre dérivées partielles qui figurent dans cette formule [1].

Pour montrer que cette condition est nécessaire, substituons la valeur (2) de z dans l'équation (1) ; le second membre devient une différentielle totale exacte à deux variables x et y. Donc on a, pour tout système de valeurs x et y, l'identité

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot$$

Mais, $\varphi(x, y, \alpha)$ étant une intégrale de (1) par hypothèse, ses deux dérivées partielles sont $X(x, y, \varphi)$ et $Y(x, y, \varphi)$. Donc la relation (3) est identiquement satisfaite pour tout système x, y quand on y remplace z par $\varphi(x, y, \alpha)$. On en conclut qu'elle est identique avant cette substitution, c'est-à-dire qu'elle a lieu pour tout système de valeurs de x, y, z, car, x et y étant donnés, on peut disposer de l'arbitraire α de manière à donner à φ (donc à z) une valeur arbitraire. Donc la condition est nécessaire.

Cette condition est aussi suffisante, car, si elle a lieu, le théorème suivant prouve qu'il existe une intégrale renfermant une constante arbitraire :

288. Théorème II. — *Supposons que l'identité* (3) *ait lieu et soit* x_0, y_0, z_0 *un système de valeurs initiales arbitraires des variables ; si* X, Y *et les quatre dérivées partielles de la formule* (3) *sont continues aux environs de ces valeurs, l'équation* (1) *admet une intégrale* $z = \varphi(x, y)$ *et une seule se réduisant à* z_0 *au point* (x_0, y_0). *De plus, cette intégrale et sa dérivée partielle par rapport à* z_0 *sont des fonctions continues de* x, y, z_0.

[1] On ne suppose donc pas l'existence de $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ ni $\dfrac{\partial Y}{\partial y}\cdot$

Nous allons montrer, en effet, que cette intégrale peut s'obtenir par l'intégration consécutive des deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dz}{dx} = X, \qquad \frac{dz}{dy} = Y,$$

y dans la première et x dans la seconde étant considérés comme des paramètres.

Intégrons d'abord l'équation entre ζ et x

$$(4) \qquad \frac{d\zeta}{dx} = X(x, y_0, \zeta),$$

et déterminons son intégrale ζ qui se réduit à z_0 pour $x = x_0$. Comme X et $\frac{\partial X}{\partial z}$ sont continues, cette intégrale existe et est unique. De plus, elle est fonction continue de z_0 et admet, par rapport à z_0, une dérivée, partielle continue (nos 174-175).

Intégrons ensuite l'équation entre z et y (x étant considéré comme un paramètre)

$$(5) \qquad \frac{dz}{dy} = Y(x, y, z)$$

et déterminons son intégrale $z = \varphi(x, y)$ qui se réduit à ζ pour $y = y_0$, en sorte que $\zeta = \varphi(x, y_0)$. Comme Y, $\frac{\partial Y}{\partial x}$ et $\frac{\partial Y}{\partial z}$ sont continues, cette intégrale existe et est unique. De plus, elle est fonction continue x, y, ζ et admet, par rapport à ζ, une dérivée partielle également continue (nos 174-175).Elle est donc aussi fonction continue x, y, z_0 et admet, par rapport à z_0, une dérivée partielle fonction continue de x, y, z_0.

Je dis que $z = \varphi(x, y)$ est l'intégrale cherchée de l'équation (1).

En effet, $\varphi(x, y)$ se réduit à ζ pour $y = y_0$ et, par suite, à z_0 au point (x_0, y_0). D'autre part, puisque $\varphi(x, y)$ est une intégrale de (5), on a déjà

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = Y(x, y, \varphi).$$

Il reste à montrer que l'on a aussi, quand x seul varie,

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = X(x, y, \varphi).$$

Cette relation a lieu pour $y = y_0$, car elle se réduit alors à l'équation (4), il faut établir qu'elle subsiste pour les autres valeurs de y.

J'observe d'abord que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ existe et est continue, d'après les conditions de continuité imposées à l'équation (5) (no 175, III). Il suffit donc de montrer que, si l'on pose

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = X(x, y, \varphi) + u,$$

la fonction continue u, qui est nulle pour $y = y_0$, reste encore nulle quand y varie.

A cet effet, calculons sa dérivée par rapport à y ; on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} Y,$$

pourvu, d'après le théorème de Schwarz sur l'interversion des dérivées secondes (*t.* I, n° 148), que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$ soit continue. C'est ce qui a lieu, car on a par (**6**)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}(X + u).$$

Portant cette valeur dans l'équation précédente, il vient par l'identité (**3**)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}(X + u) - \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial z} Y = u\frac{\partial Y}{\partial z}$$

Donc u, considérée comme fonction de y, vérifie l'équation linéaire $\frac{du}{dy} = u\frac{\partial Y}{\partial z}$ (où z est remplacé par φ) et s'annule pour $y = y_0$. Mais $u = 0$ est une intégrale particulière satisfaisant à cette condition initiale et c'est la seule, puisque $\frac{\partial Y}{\partial z}$ est continue ; donc u est constamment nulle.

Réciproquement, toute intégrale de (**1**) ayant pour valeur initiale z_0 doit satisfaire aux équations (**4**) et (**5**) (conditions initiales comprises) et, par conséquent, cette intégrale est unique.

On conclut de là que l'intégrale générale de (**1**) doit dépendre d'une constante arbitraire permettant d'attribuer à z la valeur arbitraire z_0 au point x_0, y_0.

289. Théorème et méthode d'intégration de Mayer. — *Quand l'équation* (**1**) *est complètement intégrable, son intégration dépend de celle d'une seule équation différentielle ordinaire renfermant un paramètre arbitraire.*

Soit z_0 la valeur arbitraire de z au point x_0, y_0, les conditions de continuité étant supposées satisfaites dans le voisinage de ces valeurs initiales : l'intégrale sera complètement déterminée en un point quelconque x, y par sa valeur initiale z_0. Donc, pour en trouver la valeur, il suffit de faire varier x, y en ligne droite depuis l'origine jusqu'en ce point.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons que l'on choisisse l'origine comme point initial dans le plan x, y. Il suffit d'ailleurs, pour ramener le cas général au précédent, de changer x en $x_0 + x$ et y en $y_0 + y$

dans l'équation, ce qui revient à un déplacement d'axes dans le plan x, y.

Pour déterminer la valeur au point x, y de l'intégrale qui a pour valeur z_0 à l'origine, joignons donc l'origine à ce point par une droite. Le long de celle-ci, on aura, λ désignant un paramètre constant,

$$y = \lambda x, \qquad dy = \lambda dx,$$

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1),

$$dz = (X + \lambda Y)\, dx. \tag{8}$$

Il suffit d'intégrer cette relation entre les deux variables z et x pour en déduire l'intégrale de (1). En effet, soit

$$F(x, z, \lambda) = \text{const.}$$

l'intégrale générale de (8) résolue par rapport à la constante d'intégration ; l'intégrale particulière z de valeur initiale z_0 est la fonction implicite définie par l'équation

$$F(x, z, \lambda) = F(0, z_0, \lambda).$$

En remplaçant λ par $y : x$, on obtient la relation qui a lieu entre x, y, z, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation (1) : ce sera

$$F\left(x, z, \frac{y}{x}\right) = F\left(0, z_0, \frac{y}{x}\right) \tag{9}$$

et elle dépend d'une constante arbitraire z_0.

Remarque. — En principe, la méthode de Mayer ne fournit l'intégrale de valeur initiale z_0 que dans un domaine où les conditions de continuité supposées dans les théorèmes précédents se vérifient. Mais, dans la plupart des cas pratiques, les calculs conduisent à définir l'intégrale par une équation entre des expressions littérales qui se dérivent toujours par les mêmes règles, de sorte que la formule démontrée dans un domaine restreint subsiste d'elle-même dans un domaine quelconque. Toutefois cette remarque ne peut être présentée avec toute la précision qu'elle comporte qu'en s'appuyant sur les propriétés générales des fonctions analytiques, qui ne seront exposées que plus tard.

Dans les applications que l'on rencontre, le plus simple sera généralement de choisir l'origine $x_0 = y_0 = 0$ comme point initial dans le plan x, y. Mais on ne le peut pas toujours, parce que les conditions de continuité peuvent tomber en défaut en ce point. On fait alors le changement d'axes préalable indiqué dans la démonstration précédente.

Exemple. — L'équation complètement intégrable

$$dz = \frac{2\,xz\,dx + 2\,y\,z^2 dy}{1 - x^2 - 2y^2 z}$$

satisfait aux conditions de continuité aux environs de $x = y = 0$. Cherchons l'intégrale z qui a pour valeur z_0 à l'origine.

Posons $y = \lambda x$, $dy = \lambda\, dx$ et chassons le dénominateur, il vient

$$dz\,(1 - x^2) - 2xz\,dx = 2\lambda^2\,(x^2 z\,dz + xz^2\,dx).$$

Les deux membres sont des différentielles exactes, l'intégrale de cette équation différentielle ordinaire sera

$$z\,(1 - x^2) - \lambda^2 x^2 z^2 = \text{const.} = z_0\ ;$$

et celle de l'équation aux différentielles totales,

$$z\,(1 - x^2) - y^2 z^2 = z_0.$$

290. Forme symétrique de l'équation. — L'équation plus symétrique

$$\text{(10)} \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions données de x, y, z et où C n'est pas nul, se ramène à la précédente en la résolvant par rapport à dz. La condition d'intégrabilité complète est donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{C}\right) - \frac{B}{C}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{C}\right) - \frac{A}{C}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B}{C}\right)$$

ou, tous calculs faits et sous forme symétrique,

$$\text{(11)} \quad A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0.$$

Quand cette identité a lieu, l'intégration de l'équation (**10**) peut se faire par la méthode de Mayer. On a d'ailleurs la liberté de résoudre à volonté par rapport à dx, dy ou dz et de considérer x, y ou z comme l'inconnue. On choisira comme inconnue celle des variables dont la détermination paraît la plus facile.

291. Multiplicateur ou facteur intégrant. — *Quand la condition d'intégrabilité complète* (**11**) *est vérifiée, il existe un facteur* μ *fonction de* x, y, z *tel que l'expression*

$$\mu\,(A\,dx + B\,dy + C\,dz)$$

soit une différentielle totale exacte.

En effet, l'équation (**10**) admet une intégrale renfermant une constante et qui, résolue par rapport à cette constante, prend la forme

$$\text{(12)} \qquad F\,(x, y, z) = \alpha.$$

On en tire, en différentiant,

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0$$

et, en identifiant la valeur de dz qui s'en déduit avec celle fournie par l'équation (**10**),

$$\text{(13)} \qquad \frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C}\,.$$

Ces relations ne contiennent plus α et elles ont lieu pour tout système de valeurs de x, y, z satisfaisant à (**12**), donc pour un système quelconque (x_0, y_0, z_0), car on peut faire $\alpha = F(x_0, y_0, z_0)$. Ce sont donc des identités. Appelons μ la fonction de x, y, z définie par l'un de ces rapports, on aura identiquement

$$\mu(A\,dx + B\,dy + C\,dz) = F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = dF(x, y, z),$$

ce qui prouve le théorème.

292. Solution singulière. — Quand l'équation (**10**) est complètement intégrable, elle peut admettre, en outre de l'intégrale qui renferme une constante arbitraire et qu'on appelle *l'intégrale générale*, une *solution singulière* ne renfermant rien d'arbitraire. On obtiendra d'ailleurs immédiatement cette nouvelle solution quand l'intégrale générale sera connue.

En effet, supposons connue l'intégrale (**12**) ; on en déduit immédiatement un multiplicateur μ en formant l'un des rapports (**13**) ; il vient alors

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = \frac{1}{\mu}\,dF(x, y, z).$$

L'équation ne peut donc être vérifiée que de deux manières :

1° En posant $F = \alpha$: c'est la solution générale ;

2° En posant $1 : \mu = 0$. Si l'on peut tirer de là une valeur de z, ce sera la solution singulière.

293. Remarque. — La méthode de Mayer est la méthode d'intégration la plus simple *au point de vue théorique*. Mais, *en pratique*, on rencontre souvent des exemples très simples, pour lesquels on aperçoit facilement un multiplicateur. Soit, par exemple, l'expression intégrable

$$2z(dx - dy) + (x - y)\,dz = 0.$$

On sépare la variable z de x et y en divisant par $z(x - y)$, ce qui est donc l'inverse d'un multiplicateur. Il vient

$$\frac{2(dx - dy)}{x - y} + \frac{dz}{z} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (x - y)^2 z = \alpha\,.$$

C'est l'intégrale générale. Il y a une solution particulière, $z = 0$, qui rend infini le multiplicateur $1 : z(x - y)$, mais elle rentre dans l'intégrale générale pour $\alpha = 0$.

294. Intégrabilité incomplète. — Si l'équation

$$(14) \qquad dz = X\,dx + Y\,dy$$

ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité complète, on ne peut pas la vérifier par une fonction z des deux variables x et y qui dépende

d'une constante arbitraire. Mais on le pourra peut-être par une fonction $z = \varphi(x, y)$ sans constante arbitraire. En vertu de la démonstration du théorème I, celle-ci doit rendre identique la condition

$$(15) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} Y = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z} X.$$

Donc, quand elle existe, la fonction $z = \varphi(x, y)$ se tire nécessairement de cette relation.

Ainsi, pour reconnaître s'il existe une solution et pour la trouver, il suffit de résoudre la relation (**15**) par rapport à z et de substituer la valeur trouvée dans la relation (**14**). Si celle-ci est vérifiée, ce qui sera l'exception, la valeur trouvée est une intégrale, mais nous disons que l'intégrabilité de l'expression (**14**) est *incomplète*.

En voici un exemple : Soit l'équation différentielle

$$dz = z(dx + x\,dy).$$

La relation (**15**) est

$$xz = z + xz, \qquad \text{d'où} \qquad z = 0.$$

Or $z = 0$ satisfait à l'équation différentielle. C'est donc une intégrale et la seule.

295. Extension à un nombre quelconque de variables. — Soient X_1, $X_2, \dots X_n$ des fonctions *continues* données de n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots x_n$ et d'une fonction inconnue z. Considérons l'*équation aux différentielles totales à $n+1$ variables*

$$(1) \qquad dz = \sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i.$$

On dit que l'équation est *complètement intégrable* s'il existe une relation unique entre $x_1, \dots x_n$, z, dépendant d'une constante arbitraire, dont l'équation (**1**) soit la conséquence.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (**1**) *soit complètement intégrable est que l'on ait les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *identités*

$$(2) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + X_k \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial X_k}{\partial z} \cdot \qquad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

On suppose l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles qui figurent dans ces formules [1].

En effet, l'équation (**1**) doit être complètement intégrable quand on ne

[1] On ne suppose donc pas l'existence des dérivées $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ ·

fait varier que deux x_i et x_k des variables x, ce qui exige qu'on ait les identités précédentes. D'autre part, ces conditions sont suffisantes en vertu du théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si les identités* (2) *ont lieu avec les conditions de continuité ci-dessus indiquées et qu'on désigne par* x_i^0, z_0 *un système de valeurs initiales arbitraires des* $n+1$ *variables* x_i *et* z, *l'équation* (1) *admet une intégrale et une seule*, $z = \varphi(x_1, \dots x_n)$, *se réduisant à* z_0 *au point* $(x_1^0, \dots x_n^0)$.

Le théorème est vrai pour deux variables indépendantes (nº 288). Supposons qu'il soit déjà démontré pour $n-1$, nous allons montrer qu'il subsiste pour n.

Pour plus de clarté, désignons la variable x_n par y et le coefficient X_n par Y. L'équation (1) prend la forme

$$(3) \qquad dz = \sum_{i=1}^{n-1} X_i\, dx_i + Y\, dy\,;$$

et, pour $k = n$, les identités (2) sont remplacées par

$$(4) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial y} + Y \frac{\partial X_i}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x_i} + X_i \frac{\partial Y}{\partial z}\,.$$

Laissons d'abord à y la valeur constante $y_0 = x_n^0$. Sous les conditions admises, il existe une intégrale ζ de l'équation

$$(5) \qquad d\zeta = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, y_0, \zeta)\, dx_i$$

et une seule qui prend la valeur z_0 au point $(x_1^0, \dots x_{n-1}^0, y_0)$.

Cette intégrale avant été déterminée, faisons varier y seul, et cherchons l'intégrale unique et bien déterminée de l'équation

$$(6) \qquad \frac{dz}{dy} = Y$$

qui se réduit à ζ pour $y = y_0$. Je dis que cette intégrale, $z = \varphi(x_i, y)$, sera aussi l'intégrale cherchée de l'équation (3).

En effet, cette intégrale se réduit à z_0 au point (x_i^0, y_0) et l'on a, φ étant une intégrale de (6),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Y(x_1, x_2, \dots y, \varphi).$$

Il reste donc simplement à montrer que l'on a aussi, pour chaque indice i en particulier,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = X_i(x_1, x_2, \dots y, \varphi).$$

Cette relation a lieu pour $y = y_0$ à cause de (5). Pour prouver qu'elle subsiste quand y varie, il n'y a qu'à reproduire la démonstration du n° 288 en affectant de l'indice i les lettres x et X de cette démonstration. Le théorème est donc établi.

Théorème et méthode d'intégration de Mayer. — *L'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable entre $n+1$ variables revient à l'intégration d'une seule équation à deux variables renfermant $n-1$ paramètres arbitraires.*

Considérons l'équation (1) et supposons que les conditions de continuité aient lieu pour le système de valeurs initiales $x_i^0 = 0$, z_0. Au besoin, on réaliserait cette condition par un déplacement d'axes dans le domaine des x_i. Cherchons alors l'intégrale qui a pour valeur z_0 à l'origine des x_i. On peut aller en ligne droite de l'origine des x_i au point quelconque $x_1, x_2, \dots x_n$ et, pour trouver la valeur de z en ce point, il suffit d'intégrer le long de cette droite. On a, les λ étant constants dans cette hypothèse,

$$x_2 = \lambda_2 x_1, \qquad x_3 = \lambda_3 x_1, \qquad \dots \qquad x_n = \lambda_n x_1 ;$$

et, en substituant dans l'équation (1),

$$dz = (X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n)\, dx_1.$$

Cette équation-ci est une équation différentielle ordinaire entre z et x_1. On résout son intégrale par rapport à la constante d'intégration et on choisit la constante de manière que z ait pour valeur initiale z_0 Il vient ainsi

$$F(z, x_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n) = \text{Const} = F(z_0, 0, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n).$$

La valeur de z au point $x_1, x_2, \dots x_n$ s'en déduit en éliminant les λ, on obtient ainsi l'intégrale de l'équation (1) sous la forme

$$F\left(z, x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_1}\right) = F\left(z_0, 0, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Forme symétrique de l'équation. — L'équation plus symétrique :

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0$$

se ramène à la forme précédente, en la résolvant par rapport à l'une des différentielles qu'elle contient considérée comme celle de l'inconnue. La condition d'intégrabilité complète s'établit comme dans le cas de trois variables. Il faut que les identités

$$X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right) + X_l\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) = 0$$

aient lieu pour toutes les combinaisons des indices i, k, l. Mais ces équations ne sont pas indépendantes. Si X_i diffère de 0, il suffit que les identités aient lieu pour toutes les combinaisons d'indices k, l, différents de i,

car ces conditions suffisent pour que l'équation, résolue par rapport à dx_i, soit complètement intégrable.

Quand l'équation est complètement intégrable, elle admet un *multiplicateur*. Quand on connaît l'intégrale générale, on peut en déduire un multiplicateur et, connaissant un multiplicateur, on peut en déduire la *solution singulière*, comme dans le cas de trois variables.

§ 6. Système d'équations aux différentielles totales.

296. Système complètement intégrable. — Pour simplifier l'écriture, nous allons considérer d'abord un système de trois équations seulement, mais les formules, les démonstrations et les théorèmes s'étendront d'eux-mêmes à un nombre quelconque d'équations.

Considérons donc le système de trois équations simultanées entre trois fonctions inconnues x, y, z de n variables indépendantes t_1, $t_2, \ldots t_n$:

$$(1) \qquad dx = \sum_1^n X_i\,dt_i, \qquad dy = \sum_1^n Y_i dt_i, \qquad dz = \sum_1^n Z_i dt_i,$$

les lettres X, Y, Z désignant des fonctions *continues* données de x, y, z et des t. Nous définirons le symbole d'opération $\dfrac{\delta}{\delta t_i}$ en posant

$$(2) \qquad \frac{\delta}{\delta t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} + X_i \frac{\partial}{\partial x} + Y_i \frac{\partial}{\partial y} + Z_i \frac{\partial}{\partial z}.$$

Cette opération consiste donc à dériver par rapport à t_i en considérant x, y, z comme fonctions de t_i, puis à remplacer les dérivées de x, y, z par rapport à t_i par leurs valeurs tirées du système (1).

On dit que le système (1) est *complètement intégrable* s'il admet un système d'intégrales renfermant trois constantes arbitraires distinctes, c'est-à-dire permettant d'attribuer à x, y et z des valeurs initiales arbitraires.

297. Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le système* (1) *soit complètement intégrable est que les identités*

$$(3) \qquad \frac{\delta X_k}{\delta t_i} = \frac{\delta X_i}{\delta t_k}, \qquad \frac{\delta Y_k}{\delta t_i} = \frac{\delta Y_i}{\delta t_k}, \qquad \frac{\delta Z_k}{\delta t_i} = \frac{\delta Z_i}{\delta t_k},$$

soient vérifiées pour toutes les combinaisons d'indices i, k. On suppose la continuité de toutes les dérivées partielles qui entrent dans le développement par (2) *de ces formules.*

La condition est nécessaire. En effet, l'existence des intégrales étant admise, ces relations sont satisfaites quand on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction des t et des constantes arbitraires, car les seconds membres des équations (1) sont alors des différentielles totales exactes.

Mais x, y, z sont arbitraires avec les constantes, donc les relations sont satisfaites par tous les systèmes de valeurs de t, x, y, z.

La condition est suffisante, en vertu du théorème suivant :

298. Théorème II. — *Soient $t_1^0, \dots t_n^0$ et x_0, y_0, z_0 un système de valeurs initiales des variables aux environs desquelles les conditions de continuité précédentes ont lieu. Si l'on a les identités* (**3**), *il existe un système de fonctions x, y, z et un seul prenant les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 au point $(t_1^0, \dots t_n^0)$. De plus, ces fonctions et leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0 sont des fonctions continues de x_0, y_0, z_0 et des t.*

Quand les variables t se réduisent à une seule, les équations (**1**) forment un système d'équations différentielles simultanées ordinaires. Dans ce cas, les conditions (**3**) disparaissent, l'existence et la continuité des intégrales et de leurs dérivées est établie (n° 177). Donc le théorème est vrai dans le cas d'une seule variable t. Pour prouver qu'il est général, supposons-le déjà démontré pour $n - 1$ variables t et montrons qu'il subsiste pour n.

Laissons d'abord à t_n la valeur constante t_n^0, remplaçons x, y, z par ξ, η, ζ et cherchons les intégrales ξ, η, ζ du système

$$(4) \qquad d\xi = \sum_1^{n-1} X_i\, dt_i, \qquad d\eta = \sum_1^{n-1} Y_i dt_i. \qquad d\zeta = \sum_1^{n-1} Z_i dt$$

qui se réduisent à x_0, y_0, z_0 au point $t_1^0, \dots t_{n-1}^0$.

Celles-ci trouvées, ne faisons plus varier que t_n, et cherchons les intégrales x, y, z du système

$$(5) \qquad \frac{dx}{dt_n} = X_n, \qquad \frac{dy}{dt_n} = Y_n, \qquad \frac{dz}{dt_n} = Z_n,$$

qui se réduisent à ξ, η, ζ au point t_n^0. En vertu des théorèmes du n° 177, x, y, z et leurs dérivées seront des fonctions continues de x_0, y_0, z_0 et des t.

Je dis que ces intégrales x, y, z, considérées comme fonctions de toutes les variables t, seront les intégrales cherchées du système (**1**).

En effet, elles prennent les valeurs x_0, y_0, z_0 au point $(t_1^0, \dots t_n^0)$. D'autre part, on a, puisque ce sont les intégrales de (**5**),

$$(6) \qquad \frac{\partial x}{\partial t_n} = X_n, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_n} = Y_n, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_n} = Z_n.$$

Il reste donc à montrer que l'on a aussi, pour un indice i autre que n, auquel cas les dérivées partielles de x, y, z relatives à t_i sont continues par le théorème I du n° 177,

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i, \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} = Y_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i.$$

Ces relations sont vérifiées si $t_n = t_n^0$, car, (x, y, z) se réduisant à (ξ, η, ζ), elles se tirent des équations (4). Pour montrer qu'elles subsistent pour les autres valeurs de t_n, posons

$$(7) \qquad \frac{\partial x}{\partial t_i} = X_i + u, \quad \frac{\partial y}{\partial t_i} = Y_i + v, \quad \frac{\partial z}{\partial t_i} = Z_i + w$$

et montrons que les fonctions continues u, v, w, qui sont nulles pour $t_n = t_n^0$, restent nulles quand t_n varie.

A cet effet, calculons les dérivées de u, v, w en ne faisant varier que t_n. On a

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial}{\partial t_n}\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right) - \frac{\partial X_i}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_n} - \frac{\partial X_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_n},$$

ou, en abrégé, eu égard aux relations (6) et (2), si l'interversion de dérivation est permise,

$$\frac{du}{dt_n} = \frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) - \frac{\partial X_i}{\partial t_n}.$$

Mais cette interversion est permise, en vertu du théorème de Schwarz, car cette dérivée seconde est continue. En effet, puisque $\frac{\partial x}{\partial t_n} = X_n$, il vient, eu égard à (7),

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial x}{\partial t_n}\right) = \frac{\partial X_n}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_i} + \frac{\partial X_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t_i}$$
$$= \frac{\partial X_n}{\partial t_i} + u\frac{\partial X_n}{\partial x} + v\frac{\partial X_n}{\partial y} + w\frac{\partial X_n}{\partial z}.$$

Portant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient, grâce à (3), la première des trois équations du système suivant (les deux autres s'obtenant par un calcul analogue) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt_n} &= u\frac{\partial X_n}{\partial x} + v\frac{\partial X_n}{\partial y} + w\frac{\partial X_n}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt_n} &= u\frac{\partial Y_n}{\partial x} + v\frac{\partial Y_n}{\partial y} + w\frac{\partial Y_n}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt_n} &= u\frac{\partial Z_n}{\partial x} + v\frac{\partial Z_n}{\partial y} + w\frac{\partial Z_n}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires entre u, v, w et t_n. On obtient un système d'intégrales s'annulant pour $t_n = t_n^0$ en posant $u = v = w = 0$ et il n'y a pas d'autre système satisfaisant aux mêmes conditions initiales, donc u, v et w sont bien nuls.

299. Méthode d'intégration de Mayer. — *L'intégration du système* (1) *complètement intégrable à n variables indépendantes, revient à l'inté-*

gration d'un système d'équations différentielles ordinaires renfermant $n-1$ paramètres arbitraires.

En effet, supposons les conditions de continuité relatives aux valeurs initiales réalisées pour un système de valeurs *nulles* des t et les valeurs x_0, y_0 et z_0 des fonctions inconnues. Au besoin, on réalisera cette condition par un déplacement d'axes. Cherchons le système d'intégrales x, y, z ayant ces valeurs initiales à l'origine des t. Allons en ligne droite de l'origine des t au point quelconque t_1, t_2,... t_n et intégrons les équations (**1**) le long de cette droite. On a, les λ étant constants,

$$t_2 = \lambda_2 t_1, \qquad t_3 = \lambda_3 t_1, \quad \ldots \quad t_n = \lambda_n t_1$$

et, en substituant dans les équations (**1**), il vient ($\lambda_1 = 1$)

$$\frac{dx}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i X_i, \qquad \frac{dy}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Y_i, \qquad \frac{dz}{dt_1} = \sum_1^n \lambda_i Z_i.$$

C'est un système d'équations différentielles ordinaires. Les intégrales, résolues par rapport aux constantes d'intégration, seront

$$F_1(x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \alpha, \qquad F_2 = \beta, \qquad F_3 = \gamma.$$

On détermine les constantes de façon que x, y, z aient les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 pour $t_1 = 0$; il vient ainsi

$$F_k(x, y, z, t_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = F_k(x_0, y_0, z_0, 0, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

Les valeurs de x, y, z au point quelconque t_1,... t_n s'en déduisent en éliminant les λ ; ce sont les fonctions implicites définies par le système

$$F_k\left(x, y, z, t_1, \frac{t_2}{t_1}, \ldots \frac{t_n}{t_1}\right) = F_k\left(x_0, y_0, z_0, 0, \frac{t_2}{t_1}, \ldots \frac{t_n}{t_1}\right)$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Ces équations fournissent les intégrales cherchées.

300. Cas général. — Un système de n équations simultanées aux différentielles totales entre n fonctions inconnues x_h de m variables indépendantes y_i est de la forme

(**8**) $$dx_h = \sum_{i=1}^m a_h^i \, dy_i \qquad \left\{ \begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots n, \\ i = 1, 2, \ldots m, \end{array} \right.$$

où les a sont des fonctions continues données des x, y. Définissons le symbole opératoire

$$\frac{\delta}{\delta y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^n a_h^k \frac{\partial f}{\partial x_h} ;$$

le système sera *complètement intégrable* si l'on a les identités

$$\frac{\delta a_h^i}{\delta y_k} = \frac{\delta a_h^k}{\delta y_i} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \ldots m, \\ h = 1, 2, \ldots n. \end{array} \right.$$

Toute l'analyse précédente s'étend d'elle-même au cas général, moyennant la continuité de toutes les dérivées partielles qui interviennent dans ces dernières formules. En particulier, l'intégration du système (**8**) se ramène par la méthode de Mayer à celle d'un système de n équations différentielles ordinaires. Nous utiliserons cette méthode au nº 307.

§ 7. Systèmes d'équations linéaires et homogènes par rapport aux dérivées partielles d'une même fonction inconnue.

301. Systèmes d'équations indépendantes. — Considérons un système de q équations linéaires et homogènes quant aux dérivées partielles d'une fonction inconnue f par rapport à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$X_i f = a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$
$$(i = 1, 2, .., q)$$

Ici X désigne donc le symbole opératoire

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

et les a des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Le symbole opératoire X, qui n'est qu'une combinaison linéaire de dérivées, obéit aux règles générales de dérivations. On a, par exemple,

$$X(u + v + \cdots) = Xu + Xv + \cdots$$
$$Xuv = uXv + vXu$$
$$XF(u, v, \ldots) = X(u) \frac{\partial F}{\partial u} + (Xv) \frac{\partial F}{\partial v} + \cdots$$

Nous dirons que les q équations $X_i f = 0$ sont *indépendantes* lorsqu'il n'existe entre elles aucune relation *identique* de la forme

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_q X_q f = 0,$$

où les λ sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_n$ non toutes nulles ; et nous disons que cette relation est *identique* lorsque les coefficients de toutes les dérivées partielles sont identiquement nuls, c'est-à-dire quand on a les n identités suivantes :

$$\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \cdots + \lambda_q a_i^q = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

D'après cela, un système linéaire à n variables indépendantes ne peut pas contenir plus de n équations indépendantes. En effet, si l'on avait $q > n$, le système écrit en dernier lieu admettrait toujours des solutions $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_q$ non toutes nulles, qui le rendraient identique, et les équations $X_i f = 0$ ne seraient pas indépendantes.

Supposons $q \leqslant n$. S'il y a dans le système proposé n équations indépendantes, par exemple celles d'indices $i = 1, 2, \dots n$, c'est que le système

$$\lambda_1 a_i^1 + \lambda_2 a_i^2 + \cdots \lambda_n a_i^n = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

n'est satisfait que si tous les λ sont nuls, ce qui exige que le déterminant des coefficients a_i^h du système soit différent de zéro. Les n équations indépendantes du système proposé forment donc un système de n équations homogènes entre les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tel que le déterminant des coefficients a_h^i du système, déterminant qui est le même que le précédent, est différent de 0. Par conséquent, le système des équations $X_i f = 0$ n'a que la solution banale

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f = \text{const.}$$

Si le système proposé contient moins de n équations indépendantes, comme on peut supprimer du système une équation qui est une conséquence de celles que l'on garde, on peut remplacer le système proposé par un système de q' équations indépendantes $(q' < n)$ et équivalent au premier.

Nous pouvons donc supposer maintenant $q < n$ et les équations indépendantes.

302. Réduction d'un système quelconque à un système complet. — Supposons le système proposé formé de $q < n$ équations $X_i f = 0$. Nous allons démontrer la proposition suivante :

On peut former de nouvelles équations linéaires qui seront satisfaites par toutes les solutions du système proposé.

En effet, soit f une solution ; on aura identiquement

$$X_i f = 0, \qquad X_k f = 0,$$

par suite, aussi

$$X_k(X_i f) = X_k X_i f = 0, \qquad X_i(X_k f) = X_i X_k f = 0,$$

d'où

$$X_i X_k f - X_k X_i f = (X_i X_k - X_k X_i) f = 0.$$

Les solutions f vérifient donc toutes les équations de cette forme et nous allons montrer que celles-ci sont encore linéaires. Il suffit de con-

stater que les dérivées secondes se détruisent dans le premier membre. Il vient, en développant les calculs,

$$X_k X_i f = \sum_h X_k \left(a_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} \right) = \sum_h (X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum a_h^i X_k \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

$$= \sum_h (X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{h,l} a_h^i a_l^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_l} .$$

La dernière somme est symétrique en h, l ; elle se reproduit donc aussi par la permutation des indices i, k, car celle-ci revient à celle des indices h, l. Permutant donc les indices i, k dans l'équation et sous trayant membre à membre, il reste *la formule de développement :*

$$(X_i X_k - X_k X_i) f = \sum_{h=1}^{n} (X_i a_h^k - X_k a_h^i) \frac{\partial f}{\partial x_h} ,$$

qui montre que l'équation en question est linéaire.

Formons donc les équations $(X_i X_k - X_k X_i) f = 0$ pour toutes les combinaisons d'indices. Ajoutons au système proposé toutes celles de ces équations qui sont indépendantes entre elles et qui forment avec le système primitif un système d'équations indépendantes. Nous obtenons un nouveau système d'équations indépendantes

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \dots \qquad X_{q-s} f = 0.$$

Si $q + s = n$, ce système et, par suite, le système proposé n'ont que la solution banale $f =$ const. Si $q + s < n$, on recommencera sur le nouveau système l'opération faite sur le proposé, et ainsi de suite. On arrivera finalement soit à un système de n équations indépendantes, auquel cas le système proposé n'a que la solution banale $f =$ const., soit à un système de r équations indépendantes $(r < n)$ tel que toutes les combinaisons $(X_i X_k - X_k X_i) f$ soient des combinaisons linéaires de $X_1 f$, $X_2 f, \dots X_r f$. Dans ce dernier cas, l'application de la méthode précédente ne fournit plus d'équations. Clebsch a donné à un tel système le nom de *système complet.*

On voit ainsi que la recherche des intégrales d'un système linéaire quelconque se ramène à celle des intégrales d'un système complet.

La théorie des systèmes complets repose sur le thérorème suivant :

303. Transformation des systèmes complets. — Théorème. — *Si l'on remplace un système complet*

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \dots \qquad X_r f = 0,$$

par un autre système

$$Z_1 f = 0, \qquad Z_2 f = 0, \dots \qquad Z_r f = 0,$$

équivalent au premier, c'est-à-dire tel qu'on ait

$$Z_i f = \lambda_1^i X_1 f + \lambda_2^i X_2 f + \cdots + \lambda_r^i X_r f$$

pour $i = 1, 2, \ldots r$, *les* λ *désignant des fonctions des* x *dont le déterminant n'est pas nul, le nouveau système sera encore complet.*

En effet, des deux relations

$$Z_i = \sum_h \lambda_h^i X_h, \qquad Z_k f = \sum_l \lambda_l^k X_l f,$$

on conclut

$$Z_i Z_k f = \sum_{h,l} \lambda_h^i (X_h \lambda_l^k) X_l f + \sum_{h,l} \lambda_h^i \lambda_l^k X_h X_l f.$$

La dernière somme est symétrique en h, l ; elle ne change donc pas par la permutation de ces indices. Permutons i, k dans toute l'équation précédente, h, l dans la dernière somme seulement et soustrayons membre à membre ; il vient

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = \sum_{h,l} [\lambda_h^i (X_h \lambda_l^k) - \lambda_h^k (X_h \lambda_l^i)] X_l f$$
$$+ \sum_{h,l} \lambda_h^i \lambda_l^k (X_h X_l - X_l X_h) f.$$

Puisque le système primitif est complet, le second membre est une fonction linéaire des expressions Xf ; par suite, à cause des dernières relations de l'énoncé d'où l'on tire réciproquement les Xf en fonction linéaire des Zf, ce second membre est aussi linéaire par rapport aux Zf. Donc le nouveau système est encore complet.

304. Réduction d'un système complet à un système Jacobien. — Considérons maintenant un système complet de m équations linéaires à $m + n$ variables indépendantes. Pour introduire plus de symétrie dans les calculs, nous représenterons ces variables par $y_1, y_2, \ldots y_m$ et $x_1, x_2, \ldots x_n$. Résolvons le système par rapport à m des dérivées partielles choisies de manière que le déterminant de leurs coefficients ne soit pas nul, ce qui est possible puisque les équations sont indépendantes. Supposons que ce soient les dérivées par rapport aux y ; le système primitif sera remplacé par un autre de la forme suivante :

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + a_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

qui sera encore complet (n° 303). On donne à un système complet de cette forme le nom de *système Jacobien*. Un système Jacobien est donc un système complet résolu par rapport à autant de dérivées qu'il y a d'équations. Ces systèmes jouissent de la propriété fondamentale suivante :

Théorème. — *Dans tout système jacobien, tel que le précédent, les expressions* $(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f$ *sont identiquement nulles.*

En effet, le système étant complet, on a identiquement

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = \lambda_1 Z_1 f + \lambda_2 Z_2 f + \cdots + \lambda_m Z_m f.$$

Mais les dérivées par rapport aux y ont disparu dans le premier membre, comme le montre la formule du développement donnée au n° 302 ; d'autre part, ces mêmes dérivées ont pour coefficients respectifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ dans le second membre. Donc tous les λ sont nuls, ce qui prouve le théorème.

Corollaire. — *Si φ est une intégrale d'une des équations du système jacobien, par exemple $Z_1 f = 0$, les expressions*

$$Z_2 \varphi, \; Z_3 \varphi, \ldots Z_m \varphi$$

sont aussi des intégrales (distinctes ou non) de la même équation.

En effet, $Z_1\varphi$ est nul par hypothèse, par suite, $Z_2 Z_1 \varphi$ l'est aussi ; et, puisque le système est jacobien, on a identiquement

$$Z_1 Z_2 \varphi = Z_2 Z_1 \varphi = 0.$$

305. Equivalence entre un système jacobien et un système d'équations aux différentielles totales. — On sait que l'intégration d'une seule équation linéaire et homogène aux dérivées partielles est équivalente à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires. C'est un cas particulier de la correspondance qui existe entre les systèmes jacobiens d'équations aux dérivées partielles et les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales. Nous allons donc généraliser ici la théorie du n° 278.

Considérons le système jacobien

$$(1) \qquad Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{h=1}^{n} a_h^i \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m, \\ h = 1, 2, \ldots n. \end{array} \right.$$

On aura une série d'identités de la forme

$$(Z_i Z_k - Z_k Z_i) f = 0,$$

qui se décomposent chacune en n autres par la formule du n° 302. Ces identités qui expriment que le système (1) est jacobien sont donc

$$(2) \qquad Z_k a_h^i = Z_i a_h^k \qquad \left\{ \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \ldots m, \\ h = 1, 2, \ldots n. \end{array} \right.$$

Multiplions les m équations (1) par $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$ considérés comme des différentielles indépendantes, et ajoutons membre à membre. Nous formons, les dy étant arbitraires, une équation unique équivalente au système (1) :

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h} \sum_{i=1}^{m} a_h^i dy_i = 0.$$

Posons le système d'équations aux différentielles totales

$$(4) \qquad dx_h = \sum_{i=1}^{m} a_h^i \, dy_i \qquad (h = 1, 2, \ldots n)$$

Nous commençons par observer que *les conditions* (2) *qui expriment que* (1) *est jacobien sont les mêmes que celles qui expriment que* (4) *est complètement intégrable, à savoir* (n° 300)

$$(5) \qquad \frac{\delta a_h^i}{\delta y_k} = \frac{\delta a_h^k}{\delta y_i} \qquad \begin{cases} i, k = 1, 2, \dots m, \\ h = 1, 2, \dots n, \end{cases}$$

parce que l'on a

$$\frac{\delta}{\delta y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{h=1}^{n} a_h^k \frac{\partial}{\partial x_h} = Z_k$$

et l'identité (5) est la même que (2).

Mais on doit supposer réalisées *les conditions de continuité* qui servent de base à la théorie des équations aux différentielles totales telles que (4), à savoir la continuité des coefficients a et de leurs dérivées partielles qui figurent dans les formules (5), autant dire dans les formules (2). Nous admettrons donc que ces conditions ont lieu.

Nous allons maintenant montrer que l'intégration du système jacobien (1) ou du système complètement intégrable (4) sont deux problèmes complètement équivalents.

Appelons intégrale de (1) toute fonction f des x et des y qui satisfait à l'équation (1), intégrale de (4) toute fonction f des x et des y qui demeure constante en vertu des équations (4). Je dis que les systèmes (1) et (4) admettent les mêmes intégrales.

1° *Toute intégrale de* (1) *est une intégrale de* (4).

En effet, toute intégrale f de (1) vérifie l'équation (3), qui se réduit, par les équations (4), à

$$df = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f = \text{const.}$$

Donc toute intégrale de (1) demeure constante en vertu des équations (4).

2° *Toute intégrale de* (4) *est une intégrale de* (1).

En effet, soit f une fonction qui demeure constante en vertu de (4). Donnons aux variables x, y un système de différentielles satisfaisant aux relations (4) ; nous aurons

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_h \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h = 0.$$

Remplaçons les dx par leurs valeurs tirées de (4), cette relation se transforme dans (3), et (3) se décompose dans (1) puisque les dy sont arbitraires,

306. Théorème. — *Tout système jacobien, donc aussi tout système complet, de m équations linéaires à $(m+n)$ variables indépendantes admet n intégrales distinctes et toute autre intégrale est une fonction des précédentes.*

En effet, intégrons le système (4) ; les intégrales dépendront de n constantes arbitraires permettant d'attribuer aux x des valeurs arbitraires pour un système arbitraire de valeurs des y (n° 300). Ce système, résolu par rapport aux constantes arbitraires, sera de la forme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_r(y_1, y_2, \dots y_m, x_1, x_2, \dots x_n) \quad \alpha_r \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots n) \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi obtenu n intégrales φ_r du système (4), donc aussi du système (1) ; et ces intégrales sont distinctes, puisque, les α_r étant arbitraires, il ne peut exister aucune relation entre les fonctions φ.

Montrons maintenant que toute autre intégrale est une fonction des précédentes.

Remarquons, à cet effet, qu'on a identiquement

$$\frac{d(y_1, y_2, \dots y_m, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{d(y_1, y_2, \dots y_m, x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \dots x_n)}.$$

Le second déterminant fonctionnel n'est pas nul, puisque le système (6) peut être résolu par rapport aux variables x ; le premier ne l'étant par conséquent pas non plus, les quantités y et φ sont indépendantes entre elles, et on peut les prendre comme nouvelles variables indépendantes au lieu des x, y.

Les équations (1), transformées par ce changement de variables, sont (n° 278, IV)

$$Z_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{h=1}^{n} (Z_i \varphi_h) \frac{\partial f}{\partial \varphi_h} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

et, les φ étant des intégrales, elles se réduisent à

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0.$$

Ces équations expriment donc que toute intégrale f, étant indépendante des y, est une fonction des φ seulement, ce qui prouve la proposition.

Réciproquement, *toute fonction des φ est une intégrale*, puisqu'elle demeure constante en même temps que les φ.

307. Méthode d'intégration de Mayer. — Théorème. — *L'intégration d'un système jacobien de m équations linéaires à $m + n$ variables indépendantes se ramène à l'intégration d'une équation linéaire unique à $(n + 1)$ variables indépendantes.*

La détermination des intégrales φ_r du n° précédent, ou l'intégration du système (4) aux différentielles totales, se ramène, en effet, par la méthode de Mayer (n° 299), à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires renfermant des paramètres arbitraires λ.

Nous supposons que les *conditions de continuité*, rappelées au n° 305, sont satisfaites aux environs des valeurs x^0 des x et nulles des y, sinon on commencerait par réaliser cette condition par un changement d'axes. Dans ce cas, le système des équations de Mayer correspondant à (4) est le suivant :

$$(7) \qquad \frac{dx_h}{a_h^1 + \sum\limits_i \lambda_i\, a_h^i} = dy_1 \qquad \begin{cases} h = 1, 2, \ldots n, \\ i = 2, 3, \ldots m. \end{cases}$$

Il admet n intégrales ($r = 1, 2, \ldots n$)

$$\psi_r\,(y_1, x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_2, \ldots \lambda_m) = \text{Const.}$$

Celles-ci connues, l'intégration du système (4) est effectuée par les formules (n° 299)

$$\psi_r\left(y_1, x_1, \ldots x_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{y_m}{y_1}\right) = \psi_r\left(0, x_1^0, \ldots x_n^0, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{y_m}{y_1}\right) \\ (r = 1, 2, \ldots n)$$

où les x^0 sont les valeurs initiales des x pour les y nuls, et ces valeurs sont les constantes d'intégration. Les intégrales φ_r du n° précédent, qui sont celles du système jacobien, s'obtiennent en résolvant le système précédent par rapport à ces constantes. En d'autres termes, ce sont les fonctions φ qui se tirent du système

$$(9) \quad \left\{ \psi_r\left(y_1, x_1, \ldots x_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{y_m}{y_1}\right) = \psi_r\left(0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{y_m}{y_1}\right) \right. \\ (r = 1, 2, \ldots n)$$

et se réduisent respectivement à $x_1, x_2, \ldots x_n$ quand les y s'annulent.

On voit donc que le problème se ramène à l'intégration du système (7) d'équations différentielles ordinaires, ou à celle de l'équation linéaire unique aux dérivées partielles équivalente, à savoir

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{h=1}^{n} \left(a_h^1 + \sum_i \lambda_i\, a_h^i\right) \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0.$$

Celle-ci est à $n + 1$ variables indépendantes et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Il existe une intégrale et une seule du système jacobien se réduisant à une fonction arbitraire* F $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *des variables x quand on annule tous les y.*

En effet, soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ les intégrales précédentes, se réduisant respectivement à $x_1, x_2, \ldots x_n$ quand les y s'annulent. L'intégrale $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ se réduit à $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ quand les y s'annulent. Toute autre intégrale $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ jouissant de la même propriété sera identique à la précédente, puisque, en annulant les y, on obtient

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

et, les x étant arbitraires, les deux fonctions F et Φ sont identiques.

Cette conclusion suppose les *conditions de continuité* réalisées dans le domaine des valeurs des x et aux environs des valeurs nulles des y que l'on considère.

308. Autre démonstration de la méthode de Mayer. — Si l'on a préalablement établi l'existence des intégrales, on peut justifier la méthode de Mayer sans passer par le système aux différentielles totales.

Proposons-nous donc de déterminer les intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ du système (1) se réduisant à $x_1, x_2, \ldots x_n$ quand les y s'annulent. Pour cela, faisons le changement de variables

$$y_1 = t, \qquad y_2 = tz_2, \quad \cdots \quad y_m = tz_m.$$

Nous formerons le système transformé de (1) en substituant aux $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ leurs valeurs tirées de (1) dans les équations suivantes (où le membre auxiliaire du milieu est à supprimer) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial t} + \cdots = \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial z_i} + \cdots = t\frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

La première équation sera ($i = 2, 3, \ldots m$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{h=1}^{n}\left(a_h^1 + \sum_i z_i a_h^i\right)\frac{\partial f}{\partial x_h} = 0.$$

C'est, celle que nous avons intégrée au n° précédent.

Le changement de variables, transforme les intégrales $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ du n° précédent en des fonctions $\varpi_1, \ldots \varpi_n$ de t, z, qui sont des intégrales de cette équation se réduisant à $x_1, \ldots x_n$ pour la valeur $t = 0$ qui annule tous les y. Or cette condition suffit pour déterminer ces intégrales. En effet, cette équation peut s'intégrer isolément en considérant les z comme des paramètres. Soient

$$\psi_r(t, x_1, \ldots x_n, z_2, \ldots z_m) \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

un système de n intégrales distinctes ; celles qui se réduisent à $x_1, \ldots x_n$ pour $t = 0$, se tirent du système

$$\psi_r(t, x_1, \ldots x_n, z_2, \ldots z_m) = \psi_r(0, \varpi_1, \ldots \varpi_n, z_2, \ldots z_m)$$

et celles φ des équations primitives se tirent du système transformé

$$\psi_r\left(y_1, x_1, \ldots x_n, \frac{y_2}{y_1}, \cdots \frac{y_m}{y_1}\right) = \psi_r\left(0, \varphi_1, \ldots \varphi_n, \frac{y_2}{y_1}, \cdots \frac{y_m}{y_1}\right).$$

On reconnaît les équations de tout à l'heure.

309. Deuxième théorème de Mayer. — *La détermination d'une seule intégrale d'un système jacobien se ramène à la détermination d'une seule intégrale de l'équation linéaire unique qui lui correspond.*

Supposons, en effet, que l'on connaisse une seule intégrale ψ_r de l'équation (**10**) ou du système équivalent (**7**). Les intégrales inconnues du système jacobien, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, vérifient la relation (**9**). En résolvant cette relation par rapport à φ_1, on en tire

$$\varphi_1 = \theta_1 (y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots x_n, \varphi_2, \ldots \varphi_n).$$

Effectuons sur cette identité l'opération Z_h; il vient, puisque les φ sont des intégrales,

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y_h} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} Z_h x_1 + \cdots + \frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} Z_h x_n = 0.$$

Le premier membre dépend en général des variables x, y et φ, mais φ_1 a disparu. Si les autres φ disparaissent aussi, l'équation doit se réduire à une identité, car il n'y a pas de relation entre les variables x, y. Si ceci se présente quel que soit h, θ_1 fournit l'intégrale commune du système jacobien en y remplaçant $\varphi_2, \ldots \varphi_n$ par des constantes et la question est résolue.

Supposons donc que φ_2 entre encore dans l'équation précédente pour une valeur donnée de h ; en la résolvant par rapport à φ_2, on aura

$$\varphi_2 = \theta_2 (y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots x_n, \varphi_3, \ldots \varphi_n).$$

Effectuons de nouveau sur cette identité l'opération Z_h. Si $Z_h \theta_2$ est identiquement nul quel que soit h, θ_2 fournit l'intégrale commune que l'on cherche en y remplaçant les φ par des constantes.

Dans le cas contraire, on obtient au moins une relation $Z_h \theta_2 = 0$ non identique, mais renfermant au moins une fonction φ, par exemple φ_3, et d'où l'on tirera

$$\varphi_3 = \theta_3 (y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots x_n, \varphi_4, \ldots \varphi_n).$$

En continuant ainsi de suite, ou bien on trouvera une intégrale commune avant n opérations, ou bien, après n opérations, les autres φ seront éliminés et l'on obtiendra l'intégrale cherchée

$$\varphi_n = \theta_n (y_1, \ldots y_m, x_1, \ldots x_n).$$

310. Ordre d'une intégration. — On appelle *opération d'ordre n* la recherche d'une intégrale d'une équation linéaire à $n + 1$ variables indépendantes ou du système d'équations différentielles ordinaires simultanées qui lui correspond.

D'après le théorème IV du n° 278, l'intégration complète d'une équation linéaire à $n + 1$ variables indépendantes ou du système d'équations ordinaires qui lui correspond, exige que l'on fasse successivement des

opérations d'ordres n, $(n - 1)$, $(n - 2)$,... 2, 1. Si l'on connaît déjà k intégrales, la détermination d'une nouvelle intégrale est une opération d'ordre $n - k$.

La recherche d'une intégrale d'un système jacobien de m équations à $m + n$ inconnues est donc une opération d'ordre n, en vertu du second théorème de Mayer (n° 309). L'intégration complète du système exige des opérations successives d'ordre n, $(n - 1)$,... 2, 1.

CHAPITRE VIII.

Notions sur le calcul des variations et le calcul des différences.

---

§ 1. Calcul des variations.

311. Variation d'une intégrale définie. — Soient y une fonction $f(x)$ et y' sa dérivée, $F(x, y, y')$ une fonction donnée, continue ainsi que ses dérivées partielles des divers ordres ; considérons l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Pour étudier les changements que subit cette intégrale quand on modifie la fonction y et les limites x_0 et x_1, on imagine que ces changements résultent de la variation d'un ou de plusieurs paramètres, que l'on introduit de la manière suivante :

L'équation $y = f(x)$ est, entre x_0 et x_1, celle d'un arc de courbe AB et l'intégrale (1) est prise le long de cet arc. Quand on altère y et les limites x_0, x_1, cela revient à remplacer l'arc AB par un autre A_1B_1. Pour étudier les changements éprouvés par l'intégrale quand on passe d'un arc à l'autre, on fait un changement de variables et l'on considère une représentation paramétrique de l'arc : on pose, t désignant la nouvelle variable indépendante et α_1, α_2,... des paramètres dont dépendent la forme et les extrémités de l'arc,

$$(2) \qquad x = \varphi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots), \qquad y = \psi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

On conçoit que ces valeurs de x, y se réduisent à x_0, y_0 et à x_1, y_1 respectivement pour $t = 0$ et pour $t = 1$; ensuite que, pour des valeurs particulières des paramètres (nulles par exemple), l'arc défini par les équations (2) se réduise à l'arc AB. Alors cet arc se déforme et se déplace quand les paramètres varient. On verra par la suite qu'il est généralement inutile de former explicitement les fonctions $\varphi(t, \alpha)$, $\psi(t, \alpha)$ et que le *point de vue* que nous venons de définir

importe seul pour la conduite des calculs. Ce point de vue étant établi, les définitions se réduisent aux suivantes :

La variation de l'intégrale I *est sa différentielle totale par rapport aux paramètres* α.

La variation d'une fonction quelconque de $x, y, y', y'', \ldots$ *est sa différentielle totale par rapport aux* α.

Les *variations* se représentent avec la caractéristique δ pour les distinguer des différentielles par rapport à t, que l'on appelle simplement *différentielles* et que l'on continue de représenter avec la caractéristique d. D'où la règle suivante :

Les symboles d *et* δ, *désignant des différentielles relatives à des variables indépendantes, peuvent toujours être intervertis.*

Arrivons maintenant au calcul de la variation δI de l'intégrale. Ce calcul se fait par l'application des règles générales. On prend t comme variable d'intégration ; il vient

$$I = \int_0^1 F(x, y, y') \frac{dx}{dt}\, dt$$

et, les limites étant constantes, δI se calcule par la règle de Leibnitz

$$\delta I = \int_0^1 \frac{\delta(F dx)}{dt}\, dt = \int_0^1 \frac{\delta F\, dx + F\, \delta\, dx}{dt}\, dt,$$

Après la substitution $\delta dx = d\delta x$, on peut faire une intégration par parties sur le second terme de l'intégrale ; et l'on trouve, en revenant à x comme variable d'intégration,

$$(3) \qquad \delta I = [F\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta F - \frac{dF}{dx}\, \delta x\right) dx.$$

Il y a lieu de transformer cette expression. Posons, en abrégé,

$$(4) \qquad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'} ;$$

nous aurons

$$\delta F = X\delta x + Y\delta y + Y'\delta y', \qquad \frac{dF}{dx} = X + Yy' + Y'y'' ;$$

et il viendra

$$\delta I = [F\delta x] + \int_{x_0}^{x_1} dx\, [Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x)].$$

Pour simplifier, définissons une quantité ω (appelée parfois *élément déformateur*) par la formule

$$\omega = \delta y - y'\delta x\,; \tag{5}$$

il viendra, en différentiant par rapport à t,

$$d\omega = \delta dy - y'\delta dx - dy'\delta x$$

et, en remplaçant δdy par $\delta(y'dx) = \delta y'dx + y'\delta dx$,

$$d\omega = \delta y'dx - dy'\delta x, \qquad \text{d'où} \qquad \omega' = \delta y' - y''\delta x, \tag{6}$$

où ω' est la dérivée de ω par rapport à x. On a donc

$$\delta \mathrm{I} = [\mathrm{F}\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{Y}\omega + \mathrm{Y}'\omega')\,dx.$$

Cette intégrale se transforme enfin au moyen d'une intégration par parties sur le second terme, et il vient définitivement

$$\delta \mathrm{I} = [\mathrm{F}\delta x + \mathrm{Y}'\omega]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{Y}'}{dx}\right)\omega\,dx. \tag{7}$$

312. Cas où F contient deux fonctions. — Soient z une seconde fonction de x et z' sa dérivée. La variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{F}(x, y, y', z, z')\,dx$$

se définit et se calcule en considérant z aussi comme fonction de t et α. On obtient donc $\delta\mathrm{I}$ en ajoutant aux expressions du nº précédent les termes analogues provenant de la variation de z. Soient $\mathrm{Z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$, $\mathrm{Z}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}$ les expressions analogues à Y et Y' ; définissons une quantité auxiliaire ϖ, analogue à ω :

$$\varpi = \delta z - z'\delta x, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi' = \delta z' - z''\delta x\,;$$

il faut compléter l'expression (7) de $\delta\mathrm{I}$ comme ci-dessous :

$$\left\{\begin{aligned} \delta \mathrm{I} &= [\mathrm{F}\,\delta x + \mathrm{Y}'\omega + \mathrm{Z}'\varpi]_0^1 \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1}\left[\left(\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{Y}'}{dx}\right)\omega + \left(\mathrm{Z} - \frac{d\mathrm{Z}'}{dx}\right)\varpi\right]dx. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

313. Cas où F contient des dérivées d'ordre supérieur. — Les calculs du nº 311 s'étendent facilement à l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{F}(x, y, y'\, y'', \ldots)\,dx,$$

dans laquelle F renferme des dérivées d'ordre supérieur de y. En effet, la formule (3) subsiste et l'on a

$$\delta I = \Big[F \delta x \Big]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta F - \frac{dF}{dx} \delta x \right) dx.$$

Si l'on pose, en abrégé,

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Y' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad Y'' = \frac{\partial F}{\partial y''}, \ldots$$

la quantité $\delta F - \frac{dF}{dx} \delta x$ à intégrer prend la forme

$$Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x) + Y''(\delta y'' - y'''\delta x) + \cdots$$

Mais nous avons posé

$$\omega = \delta y - y' dx, \qquad \text{d'où} \qquad \omega' = \delta y' - y'' \delta x$$

et on en conclut, en remplaçant successivement y par y', y'',...

$$\omega'' = \delta y'' - y''' \delta x, \qquad \omega''' = \delta y''' - y^{\text{IV}} \delta x, \ldots$$

Il vient donc

$$\delta I = \Big[F \delta x \Big]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx \Big[Y\omega + Y'\omega' + Y''\omega'' + \cdots \Big].$$

On fait disparaître, par un nombre suffisant d'intégrations par parties, toutes les dérivées de ω par rapport à x qui figurent sous le signe $\int$ et l'on trouve ainsi l'expression définitive

$$\delta I = \left[F \delta x + Y'\omega + Y''\omega' - \frac{dY''}{dx}\omega + \cdots \right]$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \cdots \right) \omega \, dx.$$

Si F contenait une seconde fonction z de x, il faudrait compléter δI de termes relatifs à z comme au n° 312.

314. Cas où F dépend des valeurs de x, y, z aux limites. — Si F contient les quantités x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, il faut encore ajouter aux expressions déjà obtenues de δI l'ensemble des termes qui proviennent des variations de ces quantités, à savoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \delta y_0 + \cdots \right] dx.$$

Ces termes ne dépendent que des variations aux limites.

315. Condition nécessaire de maximum ou de minimum d'une intégrale définie. — L'objet principal du calcul des variations est de déterminer les maxima et les minima d'intégrales définies dont les éléments dépendent d'une ou de plusieurs fonctions inconnues.

Dans le cas le plus général, on considère l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots z, z', \ldots)\, dx.$$

La fonction F est donnée, mais les fonctions y et z de x sont inconnues. Quant aux limites x_0, x_1, et aux valeurs correspondantes de $y, z, y', \ldots$, elles peuvent être soit données, soit complètement arbitraires, soit encore liées par une ou plusieurs équations. Il n'y a d'ailleurs aucune relation de condition entre les variables elles-mêmes et leurs valeurs aux limites. On demande de déterminer y et z et ce qui reste d'indéterminé dans les quantités aux limites de manière que l'intégrale I soit maximum ou minimum.

La recherche des conditions nécessaires et suffisantes à cet effet est un problème ardu, dans lequel nous ne voulons pas entrer. Mais le théorème suivant, qui ne donne qu'une condition nécessaire, suffit à la détermination pratique du maximum ou du minimum s'il existe :

Théorème. — *Le système des valeurs de $y, z, \ldots$ et des quantités aux limites qui rend l'intégrale maximum ou minimum doit annuler sa variation* δI *pour tout système de variations de $x, y, z, \ldots$ et des quantités aux limites compatibles avec les conditions imposées.*

Soient, en effet, $y, z, \ldots x_0, x_1, \ldots$ les valeurs qui fournissent le maximum ou le minimum cherché. Altérons infiniment peu ces valeurs en respectant les conditions imposées, et cela au moyen de la variation d'un ou de plusieurs paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; l'intégrale, considérée comme fonction de ces paramètres, doit être maximum ou minimum. Donc (abstraction faite des cas de discontinuité, que nous écartons) sa différentielle totale δI est nulle.

316. Décomposition de la condition $\delta I = 0$. — Premier cas. — Considérons l'intégrale, qui ne dépend que d'une fonction inconnue y,

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Sa variation, fournie par la formule (7), est de la forme

$$\delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\, \omega\, dx, \tag{9}$$

où A est une fonction linéaire et homogène des variations des quantités aux limites et où l'on a $B = Y - \frac{dY'}{dx}$.

Comme il n'y a pas de relation imposée entre les variables et leurs valeurs aux limites, l'équation $\delta I = 0$ se décompose en deux autres.

En effet, on peut d'abord laisser fixes les quantités aux limites, alors A est nul et il vient

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} B\,\omega\,dx = 0.$$

Mais $\omega = \delta y - y'\delta x$ est arbitraire avec δy et δx pour chacune des valeurs de x. La relation précédente ne peut donc subsister quel que soit ω que si l'on a, pour chaque valeur de x,

$$B = Y - \frac{dY'}{dx} = 0.$$

L'équation $B = 0$ est une équation différentielle, qui porte le nom d'*équation principale* et qui sert à déterminer la forme de la fonction inconnue y.

Maintenant, B étant nul, l'équation $\delta I = 0$ se réduit à

$$A = \Big[F\,\delta x + Y'\omega\Big]_0^1 = 0.$$

L'équation $A = 0$ est l'*équation aux limites*. Elle sert, comme nous le montrerons dans les exemples traités plus loin, à déterminer les constantes introduites par l'intégration de l'équation principale.

Deuxième cas. — Quand F renferme deux fonctions inconnnes y, z et leurs dérivées premières, la variation de l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx$$

est donnée par la formule (**8**) ; δI est donc de la forme

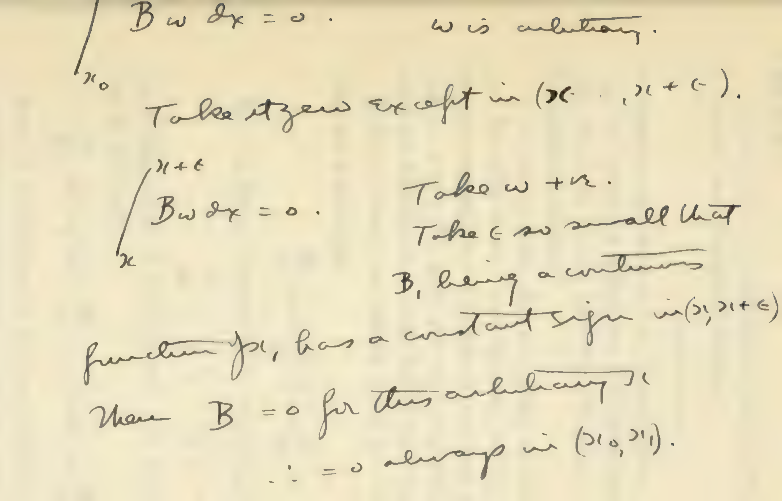
$$(\mathbf{10}) \qquad \delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} (B\,\omega + C\,\varpi)\,dx,$$

en désignant par A l'ensemble des termes aux limites et en posant

$$B = Y - \frac{dY'}{dx}, \qquad C = Z - \frac{dZ'}{dx}.$$

Si on laisse d'abord fixes les quantités aux limites, on a

$$\int_{x_0}^{x_1} (B\omega + C\varpi)\,dx = 0.$$



$$\int_{x_0} B\omega\, dx = 0. \qquad \omega \text{ is arbitrary.}$$

Take it zero except in $(x, x + \epsilon)$.

$$\int_{x}^{x+\epsilon} B\omega\, dx = 0.$$

Take ω +ve.

Take ϵ so small that

B, being a continuous function of x, has a constant sign in $(x, x + \epsilon)$

Then $B = 0$ for this arbitrary x

$\therefore = 0$ always in (x_0, x_1).

Or ceci exige que $B\omega + C\varpi$ soit nul quel que soit x, car, dans le cas contraire, on pourrait, en changeant au besoin les signes des variations, rendre $B\omega + C\varpi$ partout positif, et l'intégrale ne serait pas nulle.

L'équation $\delta I = 0$ se décompose donc en deux autres, comme dans le premier cas : l'*équation principale*

$$B\omega + C\varpi = 0$$

et l'*équation aux limites* $A = 0$. Cette dernière sert encore à déterminer les constantes introduites par l'intégration de l'équation principale. Mais, en ce qui concerne l'équation principale, il y a deux hypothèses à examiner :

1°) Si l'on ne donne aucune relation entre x, y et z, les quantités $\omega = \delta y - y'\delta x$ et $\varpi = \delta z - z'\delta x$ sont, avec δx, δy et δz, des indéterminées indépendantes et l'équation principale se décompose en deux autres : $B = 0$, $C = 0$. Ce sont deux équations différentielles simultanées qui déterminent la forme des fonctions inconnues y et z.

2°) Si l'on donne une relation $F(x, y, z) = 0$, les variations seront liées par la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Mais, en dérivant totalement $F = 0$ par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0 ;$$

et, en soustrayant de la précédente cette dernière relation multipliée par δx, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\delta y - y'\delta x) + \frac{\partial F}{\partial z}(\delta z - z'\delta x) = \frac{\partial F}{\partial y}\omega + \frac{\partial F}{\partial z}\varpi = 0.$$

Donc il existe, dans ce cas, une relation entre ω et ϖ et l'on ne peut plus annuler séparément les deux termes B et C de l'équation principale. Celle-ci donne, par l'élimination de ω et ϖ, la relation

$$C\frac{\partial F}{\partial y} - B\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

qui, jointe à $F(x, y, z) = 0$, déterminera la forme des fonctions inconnues y et z.

Remarque. — Nous avons supposé que F ne renfermait que des dérivées premières, ce qui simplifie les expressions de A, B et C,

mais la discussion s'étend d'elle-même au cas où il y aurait des dérivées plus élevées. D'ailleurs ce dernier cas ne se présentera pas dans la solution des problèmes que nous poserons tout à l'heure.

317. Méthode pratique de calcul. — En pratique, il est plus commode de conduire les calculs autrement que dans l'analyse précédente. Reprenons les deux cas examinés ci-dessus.

Premier cas. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx.$$

Prenons encore t comme variable indépendante et remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$; l'intégrale se ramènera à la forme

$$I = \int_0^1 F(x, y, dx, dy).$$

Soient respectivement X, Y, X', Y' les dérivées partielles de F par rapport à x, y, dx, dy ; il viendra

$$\delta I = \int_0^1 \delta F = \int_0^1 (X\delta x + Y\delta y + X' d\delta x + Y' d\delta y).$$

Par des intégrations par parties, on fait disparaître sous le signe $\int$ les différentielles des variations, ce qui conduit à un résultat de la forme

$$\delta I = A + \int_0^1 (P\,\delta x + Q\,\delta y), \tag{11}$$

en désignant par A la partie tout intégrée qui ne dépend que des variations aux limites, par P et Q des coefficients indépendants des variations.

Etudions maintenant la condition $\delta I = 0$ du maximum ou du minimum. L'*équation principale* sera $P\,\delta x + Q\,\delta y = 0$ et l'*équation aux limites* $A = 0$. Mais, comme δx et δy sont des indéterminées indépendantes, l'équation principale se décompose en deux autres $P = 0$ et $Q = 0$. Il y a donc surabondance d'équations pour déterminer la forme de la fonction inconnue et l'on prévoit qu'elles rentrent l'une dans l'autre. Vérifions-le.

Pour cela, comparons les deux expressions (**9**) et (**11**) de δI, elles doivent rentrer l'une dans l'autre après qu'on a remplacé dans (**9**) ω

par $\delta y - y'\delta x$. Donc, δx et δy étant des indéterminées, leurs coefficients sous les signes $\int$ sont les mêmes de part et d'autre, il vient donc

$$P = -By'dx = -B\,dy, \qquad Q = B\,dx.$$

Ainsi les deux équations $P = 0$ et $Q = 0$ reviennent l'une et l'autre à l'équation $B = 0$ du n° précédent et ne nous apprennent rien de plus. Il suffira d'intégrer l'une d'elles choisie à volonté.

Voici encore une remarque souvent utile.

Supposons qu'on fasse varier y seul, x et les quantités aux limites étant fixes (indépendantes des paramètres) ; toutes les variations autres que δy étant nulles, la formule (**11**) se réduit à

$$\delta I = \int_0^1 Q\,\delta y$$

et la condition $\delta I = 0$ donne $Q = 0$. De même, si l'on ne faisait varier que x seul, y et les quantités aux limites restant fixes, la condition $\delta I = 0$ conduirait à l'équation $P = 0$. On voit donc que si l'on se borne à chercher l'équation principale, on l'obtiendra en ne donnant de variation qu'à y ou bien qu'à x à son choix et en annulant toutes les variations aux limites.

Deuxième cas. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx.$$

Prenons t comme variable d'intégration et remplaçons y' par $\frac{dy}{dx}$ et z' par $\frac{dz}{dx}$; l'intégrale sera ramenée à la forme

$$I = \int_0^1 F(x, y, x, dx, dy, dz).$$

On en tire, avec des notations analogues aux précédentes,

$$\delta I = \int_0^1 \delta F = \int_0^1 (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta dx + Y'\delta dy + Z'\delta dz);$$

et, au moyen d'intégrations par parties, δI prend la forme

$$(\mathbf{12}) \qquad \delta I = A + \int_0^1 (P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z),$$

où A désigne encore la partie tout intégrée, qui ne dépend que des variations aux limites.

La condition $\delta I = 0$ se décompose dans l'*équation aux limites* $A = 0$

et dans l'*équation principale* $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$. Il y a, comme au n° précédent, deux hypothèses à examiner :

1°) S'il n'existe aucune relation entre x, y, z, les variations δx, δy, δz sont des indéterminées indépendantes et l'équation principale se décompose en trois autres $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Mais, en identifiant les expressions (**10**) et (**12**) de δI, on reconnaît facilement que ces trois équations se réduisent à deux distinctes $B = 0$ et $C = 0$. Toutefois la considération simultanée des trois équations introduit souvent plus de symétrie dans les calculs.

2°) S'il existe une relation $F(x, y, z) = 0$, on en tire

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta z = 0. \tag{13}$$

Dans ce cas, on se sert avec avantage de la *méthode des multiplicateurs*. On multiplie l'équation précédente par λ et on l'ajoute avec $P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0$, il vient

$$\left(P + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Q + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y + \left(R + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z = 0.$$

En vertu de (**13**), il n'y a que deux des variations qui soient indépendantes. Si l'on choisit λ de manière à annuler le coefficient de la variation dépendante, les coefficients des deux variations indépendantes seront nuls aussi. On est donc conduit à poser

$$P + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad Q + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad R + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ces trois équations et $F = 0$ forment un système de quatre équations (se réduisant à trois distinctes seulement) qui servira à déterminer y, z et λ en fonction de x.

Remarque. — Les méthodes de calcul qui précèdent peuvent s'étendre au cas où F renferme des dérivées d'ordre supérieur y'',... il faut alors faire, en plus, les substitutions plus compliquées

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}, \ldots$$

et, par intégrations par parties consécutives, faire disparaître toutes les différentielles des variations. Les calculs deviennent pénibles et, dans ce cas, les méthodes du n° 316 sont préférables.

318. Problème. Surface de révolution minimum. — *On donne deux points* A *et* B *et une droite dans un plan ; on demande de mener entre*

ces deux points la courbe qui, en tournant autour de cette droite, engendre la surface de révolution dont l'aire soit la plus petite possible.

Prenons l'axe de révolution pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y. Soient x_0, y_0 et x_1, y_1 les coordonnées des points A et B. Appliquons la méthode du numéro précédent. Considérons x et y comme des fonctions d'une variable t, qui varie de 0 à 1 quand le point x, y décrit AB. L'intégrale à rendre minimum sera

$$\mathrm{I} = \int_0^1 y\, ds, \qquad \text{où} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Calculons $\delta\mathrm{I}$; il vient successivement

$$\delta\mathrm{I} = \int_0^1 (\delta y\, ds + y\, \delta ds) = \int_0^1 \left(\delta y\, ds + y \frac{dx}{ds}\, d\delta x + y \frac{dy}{ds}\, d\delta y\right)$$
$$= \left[\frac{y(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{ds}\right]_0^1 + \int_0^1 \left[d\left(s - \frac{y\,dy}{ds}\right)\delta y - d\left(y\frac{dx}{ds}\right)\delta x\right].$$

L'*équation aux limites* est donc

$$\left[\frac{y\,(dx\,\delta x + dy\,\delta y)}{ds}\right]_0^1 = 0\ ;$$

et l'*équation principale* se décompose en deux autres :

$$d\left(s - \frac{y\,dy}{ds}\right) = 0, \qquad d\left(y\frac{dx}{ds}\right) = 0.$$

On sait que ces deux équations sont équivalentes et l'on peut se borner à considérer la seconde. Il vient, en l'intégrant, séparant les variables et intégrant de nouveau,

$$y\, dx = \mathrm{C}\, ds = \mathrm{C}\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}, \qquad \frac{d\frac{y}{\mathrm{C}}}{\sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}} = d\frac{x}{\mathrm{C}},$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{y}{\mathrm{C}} + \sqrt{\frac{y^2}{\mathrm{C}^2} - 1}\right) = \frac{x - \mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}, \qquad y = \frac{\mathrm{C}}{2}\left(e^{\frac{x-\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}} + e^{-\frac{x-\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}}}\right).$$

Donc la courbe cherchée est une *chaînette* ayant l'axe de révolution pour base.

Si les points A et B sont donnés, leurs coordonnées ne reçoivent pas de variations et l'équation aux limites disparaît. Les deux constantes d'intégration C et C_1 se déterminent par la condition que la courbe passe par les deux points A et B.

Supposons maintenant que les points A et B, n'étant pas donnés, soient seulement assujettis à se trouver sur deux courbes MN et PQ. Comme les déplacements des points A et B sur chacune de ces courbes ne dépendent aucunement l'un de l'autre, les variations à la limite 0 sont indépendantes de celles à la limite 1 et l'équation aux limites se décompose en deux autres :

$$dx_0\,\delta x_0 + dy_0\,\delta y_0 = 0, \qquad dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 = 0.$$

Ces relations serviront à déterminer les constantes. Elles expriment une propriété géométrique de la courbe qui fournit le minimum. La première montre que le déplacement $(\delta x_0, \delta y_0)$ du point A sur la courbe MN est perpendiculaire au déplacement (dx_0, dy_0) sur la courbe AB. La seconde s'interprête de même. Donc *la courbe, menée entre deux courbes données* MN *et* PQ, *qui engendre la plus petite surface de révolution, est une chaînette qui rencontre normalement ces deux courbes.*

C'est Meusnier vers 1776 qui a découvert la propriété de la chaînette que nous venons d'étudier.

319. Problème. Ligne la plus courte dans l'espace. — Soit à trouver la ligne la plus courte entre deux points $A(x_0, y_0, z_0)$ et $B(x_1, y_1, z_1)$ de l'espace. Opérons comme au n° 317 (1° du deuxième cas). Considérons x, y, z comme des fonctions d'un paramètre t qui varie de 0 à 1 le long de la ligne. L'intégrale à rendre minimum sera

$$I = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Calculons δI ; il vient

$$\delta I = \int_0^1 \delta\,ds = \int_0^1 \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$$

$$= \left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\delta x\,d\frac{dx}{ds} + \delta y\,d\frac{dy}{ds} + \delta z\,d\frac{dz}{ds}\right).$$

Les fonctions x, y, z étant indépendantes, leurs variations δx, δy et δz sont indépendantes et l'équation principale,

$$\delta x\,d\frac{dx}{ds} + \delta y\,d\frac{dy}{ds} + \delta z\,d\frac{dz}{ds} = 0,$$

se décompose en trois autres (se réduisant à deux distinctes) :

$$d\frac{dx}{ds} = d\frac{dy}{ds} = d\frac{dz}{ds} = 0; \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{ds} = \alpha, \ \frac{dy}{ds} = \beta, \ \frac{dz}{ds} = \gamma,$$

en désignant par α, β, γ trois constantes. Ce sont les cosinus directeurs de la tangente à la courbe cherchée, donc la ligne la plus courte est une droite.

Si les points A, B sont donnés, les variations aux limites sont nulles et l'équation aux limites disparaît. La droite est déterminée par la condition de passer par les deux points.

Si les points A et B sont seulement assujettis à se trouver sur deux surfaces S et S', ayant respectivement pour équations :

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \psi(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

l'équation aux limites sera

$$\left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 = 0.$$

Mais, comme les déplacements des points A et B sur S et S' sont indépendants, elle se décompose en deux autres :

$$dx_0\,\delta x_0 + dy_0\,\delta y_0 + dz_0\,dz_0 = 0, \qquad dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 = 0.$$

Celles-ci expriment qu'une droite de longueur minimum entre les deux surfaces est une perpendiculaire commune.

320. Ligne la plus courte sur une surface. — *Soit* $F(x, y, z) = 0$ *l'équation d'une surface* S ; *on demande de tracer sur la surface, entre deux de ses points* $A(x_0, y_0, z_0)$ *et* $B(x_1, y_1, z_1)$, *la ligne la plus courte possible.*

Il faut annuler la même variation δI qu'au nº précédent, mais, comme la ligne cherchée doit être tracée sur la surface, les variations δx, δy et δz sont liées par la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0.$$

Par conséquent, l'équation principale

$$\delta x\, d\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\frac{dz}{ds} = 0$$

ne se décompose plus en trois autres. Employons la *méthode des multiplicateurs* (nº 317). En ajoutant à l'équation principale, que nous venons d'écrire, l'équation qui la précède multipliée par un facteur λ, on est conduit à poser les trois équations :

$$d\frac{dx}{ds} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad d\frac{dz}{ds} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Ces trois équations, jointes à $F = 0$, sont les équations différentielles de la ligne cherchée. L'équation aux limites sera

$$\left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds}\right]_0^1 = 0.$$

Les lignes les plus courtes sur une surface s'appellent *lignes géodésiques*. On déduit des équations précédentes une propriété géométrique de ces lignes. On en tire, en effet,

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Les numérateurs sont les coefficients directeurs de la normale principale à la ligne cherchée, les dénominateurs ceux de la normale à la surface S. De là le théorème suivant :

La normale principale à une ligne géodésique coïncide en chaque point avec la normale à la surface sur laquelle cette ligne est tracée.

Si les points A et B sont donnés, la ligne géodésique est déterminée par la condition de passer par ces deux points.

Si les points A et B sont seulement assujettis à se trouver sur deux lignes L et L′ tracées sur S, l'équation aux limites se décompose dans les deux équations écrites à la fin du n° précédent et exprime que la géodésique rencontre normalement les lignes L et L′.

321. Brachistochrone. — C'est la ligne que doit suivre un point pesant pour aller du point A au point B dans le temps le plus court possible. Nous allons la déterminer en supposant nulle la vitesse initiale.

Prenons trois axes rectangulaires, celui des x étant dans le sens de la pesanteur. Soient (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points A et B. La vitesse au point (x, y, z) étant $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(x - x_0)}$, le temps T du parcours AB sera

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}.$$

L'intégrale à rendre minimum sera donc

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{X}, \qquad \text{en posant} \qquad X = \sqrt{x - x_0}.$$

Calculons δI par la méthode du n° 317, mais en observant que x_0

peut varier (nº 314) ; il vient, sans difficulté, en écrivant sur la première ligne tous les termes qui dépendent des variations aux limites,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \delta I &= \left[\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{X\,ds}\right]_0^1 + \frac{\delta x_0}{2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{X^3} \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta x\left(\frac{ds}{2X^3} + d\,\frac{dx}{X\,ds}\right) + \delta y\,d\,\frac{dy}{X\,ds} + \delta z\,d\,\frac{dz}{X\,ds}\right] \end{aligned}\right.$$

L'équation principale se décompose en trois autres (deux distinctes) :

$$(15)\qquad \frac{ds}{2X^3} + d\,\frac{dx}{Xds} = 0, \quad d\,\frac{dy}{Xds} = 0, \quad d\,\frac{dz}{Xds} = 0.$$

On tire des deux dernières $dy = \alpha\,Xds$ et $dz = \beta\,Xds$, en désignant par α, β des constantes. Par suite, $\beta\,dy = \alpha\,dz$ et

$$\beta y = \alpha z + \gamma,$$

ce qui prouve que la courbe cherchée est dans un plan vertical.

Forme de la courbe. — Pour déterminer la nature de la courbe, prenons son plan comme plan xy et plaçons l'origine au point de départ A, ce qui réduit X à $\sqrt{x}$. La seconde équation (15) nous donne, en appelant $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ la constante d'intégration,

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{x}{2a}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

Faisons la substitution

$$x = a(1 - \cos t)\ ;$$

il vient (x, y s'annulant avec t au point A)

$$dy = a \sin t\,dt\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = a(1 - \cos t)\,dt,$$

$$y = a(t - \sin t).$$

C'est la représentation paramétrique d'une cycloïde. La courbe cherchée est donc une cycloïde verticale, engendrée par un cercle de rayon a qui roule inférieurement sur l'horizontale du point A.

Détermination des constantes. — Si A et B sont donnés, la cycloïde se détermine par la condition de passer par ces deux points.

Supposons que les points A et B soient seulement assujettis à se trouver respectivement sur deux courbes données MN et PQ. Les déplacements des points A et B étant alors indépendants, l'équation

aux limites, $A = 0$, où A est la première ligne de δI dans (**14**), se décompose en deux autres :

$$dx_1\,\delta x_1 + dy_1\,\delta y_1 + dz_1\,\delta z_1 = 0,$$

$$\delta x_0\left[\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^3} - \left(\frac{dx}{Xds}\right)_0\right] - \delta y_0\left(\frac{dy}{Xds}\right)_0 - \delta z_0\left(\frac{dz}{Xds}\right)_0 = 0.$$

La première exprime que la cycloïde rencontre normalement la courbe PQ au point d'arrivée B.

Faisons, dans la seconde, les substitutions suivantes, obtenues en intégrant de x_0 à x_1 les relations (**15**) :

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{ds}{2X^3} = -\left[\frac{dx}{Xds}\right]_0^1,\ \left(\frac{dy}{Xds}\right)_0 = \left(\frac{dy}{Xds}\right)_1,\ \left(\frac{dz}{Xds}\right)_0 = \left(\frac{dz}{Xds}\right)_1;$$

elle se réduit à

$$dx_1\,\delta x_0 + dy_1\,\delta y_0 + dz_1\,\delta z_0 = 0,$$

et elle exprime que la tangente à la cycloïde au point d'arrivée B est normale à la tangente à la courbe MN au point de départ A.

Le problème que nous venons de traiter a été résolu par Jean Bernoulli vers 1696.

Remarque. — Quand la vitesse initiale est nulle, le problème suppose évidemment le point de départ A au moins à la hauteur de B ; mais les deux points peuvent être à la même hauteur et, dans ce cas, la brachistochrone est une arcade entière de cycloïde.

322. Maxima et minima relatifs. — Il existe une autre classe de problèmes que l'on comprend sous le nom de maxima et de minima relatifs ou de *problèmes des isopérimètres*, d'après les applications géométriques qui en ont fourni les premiers exemples. On considère une intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

et il s'agit de rendre cette intégrale maximum ou minimum, sous la condition qu'une autre intégrale, prise entre les mêmes limites,

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\Phi(x, y, y')\,dx$$

conserve une valeur constante l.

La détermination des maxima et minima relatifs se ramène à celle des maxima et minima absolus par la règle suivante :

Règle. — *Pour déterminer les maxima et minima relatifs de l'intégrale* I, *on désigne par k une constante inconnue et on opère comme pour déterminer les maxima et minima absolus de l'intégrale*

$$I - kV.$$

On détermine ainsi tous les éléments inconnus en fonction du paramètre inconnu k, et celui-ci se détermine lui-même au moyen de la condition $V = l$.

Pour justifier cette règle, remarquons que, dans le cas du maximum ou du minimum relatif, on doit avoir $\delta I = 0$ pour tous les systèmes de variations satisfaisant à la condition $\delta V = 0$.

En développant ces variations comme cela a été fait au n° 311 et avec les notations du n° 316, on voit donc que l'équation

$$\delta I = A + \int_{x_0}^{x_1} B\omega\, dx = 0$$

doit être une conséquence de l'équation

$$\delta V = A_1 + \int_{x_0}^{x_1} B_1\omega\, dx = 0,$$

les termes A et A_1 ne dépendant que des variations aux limites.

On en conclut d'abord que le rapport $B : B_1$ doit demeurer constant dans l'intervalle (x_0, x_1). En effet, soient ξ_1 et ξ_2 deux points quelconques de cet intervalle. Annulons toutes les variations sauf dans les deux intervalles infiniment petits $(\xi_1, \xi_1 + \varepsilon)$ et $(\xi_2, \xi_2 + \varepsilon)$; il faudra que la relation

$$\delta I = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B\omega\, dx + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} B\omega\, dx = 0$$

soit une conséquence de la relation

$$\delta V = \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} B_1\omega\, dx + \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} B_1\omega\, dx = 0.$$

Dans ces relations, ω est une indéterminée fonction de x. Remplaçons-la par une autre indéterminée α en posant, d'une part, $\omega = \alpha : B_1$ entre ξ_1 et $\xi_1 + \varepsilon$ et, de l'autre, $\omega = -\alpha : B_1$ entre ξ_2 et $\xi_2 + \varepsilon$. Il faudra que la relation

$$(1) \qquad \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\alpha\, dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \frac{B}{B_1}\alpha\, dx$$

soit une conséquence de la relation

$$(2)\qquad \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\, dx = \int_{\xi_2}^{\xi_2+\varepsilon} \alpha\, dx.$$

Supposons l'indéterminée α positive et appliquons le théorème de la moyenne de manière à faire sortir $B : B_1$ du signe $\int$ dans la relation (1). A cet effet, soient respectivement m_1 et m_2 des valeurs moyennes de $B : B_1$ dans le premier et le second des intervalles d'intégration. La relation (1) pourra se mettre sous la forme

$$m_1 \int_{\xi_1}^{\xi_1+\varepsilon} \alpha\, dz = m_2 \int_{\xi_2}^{\xi_2-\varepsilon} \alpha\, dx,$$

ce qui donne $m_1 = m_2$, eu égard à (2). Mais, ε étant infiniment petit, les quantités m_1 et m_2 tendent respectivement vers les valeurs de $B : B_1$ aux points ξ_1 et ξ_2. Donc ces dernières valeurs sont égales et le rapport $B : B_1$ est constant. Soit k sa valeur ; on aura

$$B - kB_1 = 0.$$

Ceci posé, il faut que l'équation $\delta I - k\delta V = 0$, qui se réduit à

$$A - kA_1 = 0,$$

soit aussi une conséquence de $\delta V = 0$; mais, comme elle ne contient plus ω, elle doit avoir lieu indépendamment de $\delta V = 0$. On trouve donc les conditions $B - kB_1 = 0$ et $A - kA_1 = 0$, qui sont celles du maximum ou du minimum absolu de l'intégrale $I - kV$. La règle est ainsi justifiée.

323. Problèmes de maxima et de minima relatifs. — Premier problème. — *Étant donnés deux points* A *et* B *dans un plan, trouver, parmi toutes les courbes ayant même longueur* $2l$, *celle pour laquelle le segment compris entre l'arc* AB *et sa corde est maximum.*

Prenons la droite AB pour axe des x et la perpendiculaire au milieu de AB pour axe des y. En supposant que $AB = 2a$, il faut rendre maximum l'intégrale

$$S = \int_{-a}^{+a} y\, dx, \qquad \text{sous la condition} \qquad \int_{-a}^{+a} ds = 2l.$$

D'après la règle, cherchons le maximum absolu de l'intégrale

$$I = \int_{-a}^{+a} (y\, dx - k\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Les points A et B étant donnés, les variations aux limites seront nulles. Il vient ainsi

$$\delta I = \int_{-a}^{+a}\left(\delta y\, dx + y\, d\,\delta x - k\frac{dx\, d\,\delta x + dy\, d\,\delta y}{ds}\right)$$
$$= \int_{-a}^{+a} \delta y\, d\left(x + k\frac{dy}{ds}\right) - \delta x\, d\left(y - k\frac{dx}{ds}\right).$$

On doit donc annuler les coefficients de δx et de δy, ce qui fournit deux formes équivalentes de l'équation principale (nº 317). On obtient ainsi immédiatement les deux intégrales premières :

$$x - C = -k\frac{dy}{ds}, \qquad y - C_1 = k\frac{dx}{ds};$$

puis, la courbe cherchée, en ajoutant leurs carrés ; c'est le cercle :

$$(x - C)^2 + (y - C_1)^2 = k^2.$$

Pour $y = 0$, on doit avoir $x = \pm a$, donc $C = 0$ et $C_1 = \pm\sqrt{k^2 - a^2}$, ce qui correspond aux deux solutions symétriques par rapport à AB. Enfin, il faut faire en sorte que l'arc soit égal à $2l$. Soit 2θ l'angle au centre sous-tendu par AB ; on a $\theta k = l$ et $k \sin\theta = a$. Eliminant k, on a, pour déterminer θ (et, par suite, k), l'équation transcendante

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{a}{l}.$$

En supposant a infiniment petit, cette analyse prouve que, parmi toutes les courbes fermées de même périmètre, c'est le cercle qui enferme la plus grande aire.

Deuxième problème. — *Parmi toutes les courbes isopérimètres tracées entre deux points* A *et* B *dans le plan* xy, *trouver celles qui, en tournant autour de l'axe des* x, *engendrent les surfaces de révolution d'aire maximum ou minimum ; ou, ce qui revient au même, celles dont le centre de gravité est le plus haut ou le plus bas possible.*

On doit rendre maximum ou minimum $\int y\, ds$ sous la condition $\int ds = l$, ce qui, selon la règle, conduit à poser

$$\delta \int (y - k)\, ds = 0.$$

Cette équation ne diffère de celle traitée au nº 318 que par la substitution de $y - k$ à y, ce qui n'altère ni δy ni δx. Il suffit donc de

changer aussi y en $y - k$ dans le résultat : la courbe cherchée est une chaînette

$$y - k = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x-C_1}{C}} + e^{-\frac{x-C_1}{C}}\right).$$

Les constantes se déterminent par la condition de faire passer la courbe par les points A et B et de donner à l'arc AB la longueur voulue. Il y aura généralement plusieurs solutions, correspondant à des maxima ou à des minima suivant que la concavité sera tournée ou non vers l'axe de révolution.

Troisième problème. — *Parmi toutes les courbes isopérimètres tracées entre* A *et* B *comme dans le problème précédent, trouver celles qui engendrent les volumes de révolution maximum ou minimum.*

On doit rendre $\int y^2 dx$ maximum ou minimum sous la condition $\int ds = l$. On est donc conduit à poser

$$\delta \int (y^2 dx - k\, ds) = 0.$$

Les points A et B étant donnés, les variations aux limites seront nulles. Pour obtenir l'équation principale, on peut ne faire varier que y (n° 317) ; il vient ainsi successivement

$$\int\left(2y\,\delta y\, dx - k\,\frac{dy\, d\,\delta y}{ds}\right) = 0, \qquad \int\left(2y\, dx + k\, d\,\frac{dy}{ds}\right)\delta y = 0.$$

L'équation principale est donc

$$2y + k\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Or, en observant que l'on a (R étant le rayon de courbure et φ l'inclinaison de la tangente)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d \sin\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{ds} = \pm\,\frac{1}{R},$$

cette équation peut s'écrire, en changeant au besoin le signe de k,

$$R = \frac{k}{2y}\cdot$$

Donc le rayon de courbure est en raison inverse de l'ordonnée. La courbe cherchée est la *courbe élastique* et son équation a été intégrée au n° 252 (sauf que les axes sont intervertis).

324. Maxima et minima des intégrales doubles. — Nous n'examinerons que le cas le plus simple. Soit z une fonction de deux variables indépendantes x, y et soient p et q ses deux dérivées partielles premières. Considérons l'intégrale double

$$\mathrm{I} = \int\int \mathrm{F}(x, y, z, p, q)\, dx,\, dy,$$

étendue à un domaine déterminé D. On donne la fonction F et la valeur de z sur le contour du domaine d'intégration ; on demande de déterminer z en fonction de x, y de manière que l'intégrale double soit maximum ou minimum.

Pour résoudre ce problème, on raisonne comme précédemment. On imagine que z dépende de certains paramètres, dont la variation détermine δz et on exprime que la variation correspondante $\delta \mathrm{I}$ est nulle dans le cas du maximum ou du minimum.

Pour calculer $\delta \mathrm{I}$, désignons par Z, P, Q les dérivées partielles de F par rapport à z, p, q. On a, en intervertissant ∂ et δ,

$$\delta \mathrm{F} = \mathrm{Z}\, \delta z + \mathrm{P} \frac{\partial\, \delta z}{\partial x} + \mathrm{Q} \frac{\partial\, \delta z}{\partial y} \;;$$

d'où,

$$\delta \mathrm{I} = \int\int \mathrm{Z}\, \delta z\, dx\, dy + \int dy \int \mathrm{P} \frac{\partial\, \delta z}{dx}\, dx + \int dx \int \mathrm{Q} \frac{\partial\, \delta z}{\partial y}\, dy.$$

Donc, en intégrant par parties sous le signe $\int$, et en observant que δz s'annule par hypothèse sur le bord du domaine D, il vient

$$\delta \mathrm{I} = \int\int \left(\mathrm{Z} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \right) \delta z\, dx\, dy.$$

De là, pour un maximum ou un minimum, la condition :

$$\mathrm{Z} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles qui doit servir à déterminer z.

325. Surfaces minima. — Proposons-nous de déterminer la surface d'aire minimum parmi toutes celles qui s'appuient sur un contour fermé donné.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de cette surface, l'aire est représentée par l'intégrale double, étendue à un domaine donné,

$$\int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

On a, dans le cas actuel,

$$Z = 0, \qquad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation aux dérivées partielles à laquelle z doit satisfaire devient

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0.$$

Cette équation est l'équation aux dérivées partielles des *surfaces minima*. Nous verrons plus loin qu'elle exprime que la courbure moyenne de la surface est nulle en chaque point.

Exercices.

1. *Problème.* — Montrer que, parmi les surfaces de révolution de même aire, celle qui enferme le plus petit volume est la sphère.

2. *Abaissement de l'équation principale.* — Quand y'' est la plus haute dérivée qui entre dans la fonction à intégrer, l'équation principale, $Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} = 0$, est généralement du 4e ordre (Y'' contenant y'').

Cet ordre s'abaisse dans les cas suivants :

1° Si F ne contient pas explicitement y, on a $Y = 0$ et l'on obtient immédiatement une intégrale première (du 3e ordre)

$$Y' - \frac{dY''}{dx} = C.$$

2° Si F ne contient explicitement ni x ni y, on peut éliminer Y' de la relation précédente au moyen de $dF = Y'dy' + Y''dy''$, d'où

$$dF = C dy' + y''dY'' + Y''dy'' = C dy' + d(y''Y'')$$

et on obtient une intégrale deuxième (du second ordre)

$$F = C_1 + Cy' + y''Y''.$$

3. *Problème.* — Entre deux points A et B du plan, mener une courbe AMB telle que l'aire comprise entre cette courbe, les rayons de courbure aux points A et B et la développée soit un minimum.

R. Soit R le rayon de courbure ; l'intégrale à rendre minimum est

$$I = \int R\, ds = \int \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\, dx.$$

Observons que F ne contient ni x ni y et que $y''Y'' = -F$; l'inté-

grale deuxième de l'exercice précédent devient $2F = C_1 + Cy'$. Mais $F = R\frac{ds}{dx}$; il vient donc, en appelant φ l'inclinaison de la tangente,

$$2R\frac{ds}{dx} = C_1 + Cy', \qquad \text{d'où} \qquad 2R = C_1 \cos\varphi + C\sin\varphi,$$

c'est l'*équation intrinsèque* (n° 255, remarque) d'une *cycloïde.*

Si l'on donne les extrémités A et B et les directions des rayons de courbure en ces deux points, ces conditions serviront à déterminer les constantes d'intégration. Dans le cas contraire, il faudra recourir à l'équation aux limites.

4. *Dérivées exactes.* — Trouver la condition pour que $F(x, y, y', \ldots y^n)$ soit la dérivée exacte d'une fonction de $x, y, \ldots y^{n-1}$ quel que soit y (n° 248).

R. Il faut que $\int F(x, y, y', \ldots)\,dx$ ne dépende que des valeurs de x, y, y',... aux limites de l'intégration et non du choix de y ; il faut donc que sa variation soit nulle quand les quantités aux limites sont fixes. On a donc, quel que soit ω,

$$\int\left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \cdots\right)\omega\,dx = 0.$$

La condition cherchée est qu'on ait identiquement

$$Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \cdots = 0.$$

5. *Propriétés des lignes géodésiques.* — 1°) Si, à partir d'un point A situé sur une surface, on mène dans toutes les directions des lignes géodésiques d'égale longueur AM, le lieu de leurs extrémités M est une courbe orthogonale aux lignes géodésiques.

2°) Si, en chaque point d'une ligne MN sur une surface, on élève une géodésique normale à MN et de longueur constante, le lieu de leurs extrémités rencontre aussi normalement les lignes géodésiques.

3°) Si l'on prend sur une surface deux points F et F′ et que l'on cherche le lieu des points M de la surface tels que la somme de leurs distances géodésiques à F et F′ soit constante, ce lieu coupe sous le même angle les deux lignes géodésiques MF et MF′.

Ces propriétés, énoncées par Gauss, se tirent facilement du calcul des variations. Démontrons seulement la première, les autres s'établissant d'une manière analogue. Soient (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de A et M. La longueur de la ligne AM est donnée par l'intégrale $I = \int_0^1 ds$ et sa variation est nulle quand on passe d'une ligne géodésique à la suivante. Cette variation δI se calcule par la formule du n° 319. Mais, dans cette formule, l'intégrale est nulle, parce qu'il s'agit d'une ligne

géodésique ; les termes à la limite 0 sont nuls aussi, puisque A est fixe ; il reste seulement

$$\delta I = \left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0,$$

ce qui prouve le théorème.

6. *Problème.* — Soit ρ une fonction $f(r)$ donnée du rayon vecteur OM dans l'espace. Trouver la courbe le long de laquelle $\int \rho\, ds$ est maximum ou minimum.

R. Prenons le pôle 0 comme origine de coordonnées rectangulaires. L'équation principale se décompose en trois autres :

$$d\left(\rho \frac{dx}{ds}\right) = ds \frac{\rho' x}{r}, \quad d\left(\rho \frac{dy}{ds}\right) = ds \frac{\rho' y}{r}, \quad d\left(\rho \frac{dz}{ds}\right) = ds \frac{\rho' z}{r} \cdot$$

Multiplions-les par les cosinus X, Y, Z de la binormale et ajoutons : il vient facilement $Xx + Yy + Zz = 0$, c'est-à-dire que le wronskien $W(x, y, z)$ est nul. Donc x, y, z sont liés par une relation linéaire homogène et la courbe est dans un plan passant par O.

Pour trouver son équation, prenons les coordonnées polaires r et θ dans son plan. L'intégrale à rendre maximum ou minimum est $\int \rho\, ds$ ou $\int \rho \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$. Calculons l'équation principale en ne faisant varier que θ, nous trouvons immédiatement

$$d\left(\rho \frac{r^2 d\theta}{ds}\right) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r^2 d\theta}{ds} = \frac{k}{\rho} \cdot$$

Les variables r et θ se séparent et l'intégration est ramenée aux quadratures.

7. *Cas particulier du problème précédent* : $f(r) = 1 : (r^2 \pm l^2)$. — Dans ce cas, on achève facilement la solution, la dernière équation devient, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{xdy - ydx}{ds} = k(x^2 + y^2 \pm l^2),$$

ou, en appelant φ l'inclinaison de la tangente,

$$(1) \qquad x \sin \varphi - y \cos \varphi = k(x^2 + y^2 \pm l^2).$$

Dérivons par rapport à s ; il vient (l étant une constante)

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{d\varphi}{ds} = 2k\,(x \cos \varphi + y \sin \varphi).$$

En annulant la parenthèse, on trouve une solution particulière (droites passant par O). La solution générale doit se tirer de $d\varphi : ds = 2k$. C'est

donc un cercle de rayon $1 : 2k$, mais il faut exprimer qu'il satisfait à (1). Soit a, b son centre : substituons dans (1) les valeurs sur la circonférence :

$$x = a + \frac{1}{2k} \sin\varphi, \qquad y = b - \frac{1}{2k} \cos\varphi\,;$$

nous trouvons, entre les constantes a, b, k, la relation

$$\frac{1}{4k^2} = a^2 + b^2 \pm l^2.$$

Conservons a, b comme constantes d'intégration et éliminons k; les cercles cherchés ont pour équation

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by = \pm l^2.$$

Ces cercles peuvent se définir par leur relation avec le cercle fixe $x^2 + y^2 = l^2$. Dans le cas du signe $+$, l'axe radical passe par O et les cercles (2) coupent le cercle fixe en deux points diamétralement opposés. Dans le cas du signe $-$, l'axe radical est la polaire du point O et les cercles (2) coupent orthogonalement le cercle fixe.

Si l'on regarde $1 : f(r)$ comme l'échelle d'une carte de l'espace non-euclidien dans l'espace euclidien, ces résultats fournissent une représentation intéressante des deux géométries non-euclidiennes, riemanienne (signe $+$) et lobatschefskienne (signe $-$). Les cercles trouvés donnent la carte des droites dans chaque système.

§ 2. Calcul des différences finies.

326. Définitions et notations. — Soient $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots$ une suite de valeurs que reçoit une variable y. Les accroissements successifs de y quand on passe d'une valeur à la suivante s'appellent les *différences premières* de ces valeurs. La formation de ces différences est une opération qui se désigne par Δ. On pose

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \ldots$$

Les différences des différences premières sont les *différences secondes*

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \qquad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots$$

Les *différences troisièmes* seront, de même,

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \qquad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots$$

et ainsi de suite.

Il est souvent avantageux de représenter par ∇ (qui s'énonce pseudodelta) l'opération qui consiste à passer d'une valeur à la suivante dans la suite $y_0, y_1, y_2, \ldots$ On a, par définition,

$$\nabla y_0 = y_1, \qquad \nabla y_1 = y_2, \ldots \qquad \nabla y_n = y_{n+1}, \ldots$$

L'opération ∇ peut aussi se répéter successivement. On aura

$$\nabla^2 y_n = \nabla y_{n+1} = y_{n+2}, \ldots \qquad \nabla^p y_n = y_{n+p}, \ldots$$

et, en particulier, $\nabla^n y_0 = y_n$.

Remarque. — Comme $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$, on a

$$\nabla y_n = y_n + \Delta y_n = (1 + \Delta) y_n,$$
$$\Delta y_n = (\nabla - 1) y_n.$$

Ainsi les opérations Δ et ∇ sont liées par les formules :

$$\nabla = 1 + \Delta, \qquad \Delta = \nabla - 1.$$

327. Propriétés des opérations Δ et ∇. — 1°) On a, en vertu des définitions précédentes,

$$\Delta^p \Delta^q y_n = \Delta^q \Delta^p y_n = \Delta^{p+q} y_n ;$$

et, de même,

$$\nabla^p \Delta^q y_n = \nabla^q \Delta^p y_n = \nabla^{p+q} y_n = y_{n+p+q}.$$

Les opérations Δ et ∇ jouissent donc des propriétés :

$$\Delta^p \Delta^q = \Delta^q \Delta^p = \Delta^{p+q}, \qquad \nabla^p \nabla^q = \nabla^q \nabla^p = \nabla^{p-q}.$$

2° Si $u, v, z, \ldots$ sont des quantités variables, on a

$$\Delta(u + v - z + \cdots) = \Delta u + \Delta v - \Delta z + \cdots$$
$$\nabla(u + v - z + \cdots) = \nabla u + \nabla v - \nabla z + \cdots$$

et, si a est une constante,

$$\Delta a y = a \Delta y, \qquad \nabla a y = a \nabla y.$$

328. Expression de $\Delta^n y_0$ en fonction de $y_0, y_1, \ldots y_n$. — On a, en vertu des propriétés établies au n° précédent, les symboles Δ et ∇ se comportant comme des quantités dans les calculs,

$$\Delta y_0 = (\nabla - 1) y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = (\nabla - 1).(\nabla - 1) y_0 = (\nabla - 1)^2 y_0$$

et, en général,

$$\Delta^n y_0 = (\nabla - 1)^n y_0.$$

Si l'on développe et remplace $\nabla^k y_0$ par y_k, on trouve

$$\Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \cdots \pm y_0.$$

329. Expression de y_n, en fonction de $y_0, \Delta y_0, \ldots \Delta^n y_0$. — On a

$$y_1 = \nabla y_0 = (1 + \Delta) y_0$$
$$y_2 = \nabla y_1 = (1 + \Delta)^2 y_0$$

et, en général,

$$y_n = \nabla^n y_0 = (1 + \Delta)^n y_0.$$

Si l'on développe, il vient

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y_0 + \cdots + \Delta^n y_0.$$

Remarque. — Les résultats de ce n° et du précédent peuvent être considérés comme compris dans les relations symboliques :

$$\Delta^n = (\nabla - 1)^n \qquad \text{et} \qquad \nabla^n = (1 + \Delta)^n.$$

330. Différences des fonctions simples. — Nous allons considérer simultanément une variable indépendante x et une fonction y de x.

Nous représenterons par y_0, y_1, y_2,... les valeurs successives de y quand on donne à x une série d'accroissements égaux représentés par h. Les valeurs successives de y et, par conséquent, leurs différences successives, dépendent de la valeur initiale de x et de l'accroissement h. Ce sont donc des fonctions de x et de h qu'il s'agit de déterminer.

2°) *Fonction entière.* Supposons y de degré m

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Kx + L.$$

On a d'abord

$$\Delta y = A[(x+h)^m - x^m] + B[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}] + \cdots + Kh.$$

et, en ordonnant par rapport à x,

$$\Delta y = mAx^{m-1}h + B'x^{m-2} + \dots + K'.$$

Le premier terme, qui est de l'ordre le plus élevé en x, est de degré $m - 1$ et son coefficient s'obtient en multipliant celui du premier terme de y par le degré de ce terme et par h.

En opérant de même sur Δy, il en résulte

$$\Delta^2 y = m(m-1)\, Ax^{m-2}h^2 + B''x^{m-3} + \dots + K''$$

et ainsi de suite. Le degré de chaque différence successive va en diminuant d'une unité. Donc $\Delta^m y$ est de degré 0 et se réduit à son premier terme, dont la loi de formation est connue. On a donc

$$\Delta^m y = 1.2\dots m\, A\, h^m.$$

Ainsi *la différence m^{me} d'une fonction entière de degré m est constante quand la variable x varie par degrés égaux et, par conséquent, toutes les différences suivantes sont nulles.*

2°) *Fonction exponentielle.* On a

$$\Delta A^{ax+b} = A^{a(x+\Delta x)+b} - A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1)$$

$$\Delta^2 A^{ax+b} = (A^{a\Delta x} - 1)\,\Delta A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1)^2$$

et, en général,

$$\Delta^n A^{ax+b} = A^{ax+b}(A^{a\Delta x} - 1)^n.$$

3°) *Fonctions circulaires.* On a

$$\begin{aligned}\Delta \sin(ax+b) &= \sin(ax+b+a\Delta x) - \sin(ax+b)\\ &= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax+b+\frac{a\Delta x}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax+b+\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

et, en général,

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \sin\left(ax+b+n\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

De même,

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^n \cos\left(ax+b+n\frac{a\Delta x+\pi}{2}\right).$$

331. Produits équidifférents. — 1°) Soit symboliquement

$$x^{[p]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{p-1}\,h);$$

on aura

$$\begin{aligned}\Delta x^{[p]} &= x(x-h)\ldots(x-\overline{p-2}\,h)\,ph\\ &= p\,x^{[p-1]}\,\Delta x\end{aligned}$$

De même,

$$\Delta^2 x^{[p]} = p\Delta x\,\Delta x^{[p-1]} = p(p-1)\,x^{[p-2]}\,\Delta x^2$$

et, en général,

$$\Delta^n x^{[p]} = p(p-1)\ldots(p-n+1)\,x^{[p-n]}\,\Delta x^n.$$

L'analogie avec la règle pour différentier une puissance dans le calcul différentiel est évidente.

2°) Soit encore symboliquement

$$x^{-[p]} = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{p-1}\,h)};$$

on trouve sans peine

$$\Delta x^{-[p]} = \frac{-ph}{x(x+h)\ldots(x+ph)} = -p\,x^{-[p+1]}\,\Delta x,$$

d'où, en général,

$$\Delta^n x^{-[p]} = (-1)^n p(p+1)\ldots(p+n-1)\,x^{-[p+n]}\,\Delta x^n.$$

332. Calcul inverse des différences. Addition d'une fonction périodique arbitraire. — Le calcul inverse des différences est au calcul direct ce que le calcul intégral est au calcul différentiel, il a pour objet de déterminer une fonction quand on connaît sa différence finie ou, plus généralement, une relation entre cette fonction, quelques-unes de ses différences et la variable indépendante. Nous ne nous occuperons ici que du premier cas.

Soit x la variable indépendante, dont l'accroissement $\Delta x = h$ est supposé constant; soient $F(x)$ la fonction inconnue et $f(x)$ la différence donnée : on doit avoir

$$\Delta F(x) = f(x), \qquad \text{ou} \qquad F(x+h) - F(x) = f(x).$$

La fonction $F(x)$ dont la différence est $f(x)$ se représente par $\Sigma\, f(x)$ et se nomme l'*intégrale aux différences finies* de $f(x)$. D'après ces notations, les caractéristiques Δ et Σ appliquées à la même fonction se détruisent et l'on a

$$\Delta\, \Sigma\, f(x) = f(x).$$

Dans le calcul intégral ordinaire, quand on a obtenu une intégrale particulière d'une différentielle donnée, on ajoute à cette première solution une constante arbitraire pour former l'intégrale générale. Dans le calcul intégral aux différences finies, ce n'est pas une constante arbitraire qu'il faut ajouter, mais la fonction la plus générale dont la différence est nulle, c'est-à-dire une fonction quelconque de période $h = \Delta x$. Nous désignerons une pareille fonction par Π.

D'après cela, $f(x)$ étant une fonction particulière dont la différence est $\Delta\, f(x)$, on a

$$\Sigma\, \Delta\, f(x) = f(x) + \Pi.$$

Donc les symboles Σ et Δ se détruisent encore, quand Σ précède Δ, mais il faut ajouter une fonction périodique arbitraire Π.

En vertu de cette remarque, les calculs effectués au n° 330 et 331 donnent réciproquement

$$\Sigma A^x = \frac{A^x}{A^h - 1} + \Pi.$$

$$\Sigma \cos(ax+b) = \frac{\sin\left(ax - \frac{ah}{2} + b\right)}{2 \sin \frac{ah}{2}} + \Pi.$$

$$\Sigma\, x^{(p)} = \frac{x^{(p+1)}}{(p+1)h} + \Pi.$$

333. Intégrale définie aux différences. — L'intégrale aux différences jouit d'une propriété analogue à celle des fonctions primitives dans le calcul infinitésimal : Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ une suite de valeurs de différences h, et $F(x)$ une intégrale aux différences de $f(x)$; on a

$$F(x_2)-F(x_1)=f(x_1),\quad F(x_3)-F(x_2)=f(x_2),\ldots\quad F(x_n)-F(x_{n-1})=f(x_{n-1})$$

et, en additionnant toutes ces relations,

$$F(x_n)-F(x_1)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1}).$$

C'est la propriété que nous voulions établir. Le second membre s'appelle l'*intégrale définie aux différences de* $f(x)$ et se désigne, en abrégé, par $\overset{x_n-h}{\underset{x_1}{\Sigma}} f(x)$. L'équation prend ainsi la forme

$$\sum_{x_1}^{x_n-h} f(x) = F(x_n) - F(x_1),$$

et l'analogie avec les formules de quadratures est évidente. Par exemple, au moyen de l'intégrale de A^x indiquée à la fin du n° précédent, on obtient, h étant égal à $\dfrac{b-a}{n}$,

$$A^a + A^{a+h} + A^{a+2h} + \cdots + A^{a+(n-1)h} = \sum_a^{b-h} A^x = \frac{A^b - A^a}{A^h - 1}.$$

§ 3. Nombres et polynomes de Bernoulli.

334. Nombres de Bernoulli. — Les nombres de Bernoulli sont les nombres $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ définis par le développement en série de Maclaurin :

$$(1)\qquad \frac{x}{e^x-1} = 1 + \frac{B_1 x}{1} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{B_n x^n}{n!} + \cdots$$

La fonction du premier membre et ses dérivées sont continues pour $x=0$. Le développement peut donc se poursuivre indéfiniment. Nous ne nous occupons pas ici de la question de convergence. Toutefois nous constaterons au n° 350 que le développement est valable dans un cercle de rayon 2π. La fonction du premier membre est la *fonction génératrice* des nombres de Bernoulli.

Nous observerons d'abord que la fonction

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

est une fonction paire de x. Il s'ensuit évidemment que B_1 est égal à $-\frac{1}{2}$ et que *tous les autres* B *d'indice impair sont nuls.*

Pour mettre en évidence les propriétés des nombres de Bernoulli, il est commode de se servir de la notation symbolique suivante :

Convenons de remplacer B^n par B_n dans le développement de e^{Bx} en série potentielle, la formule (1) pourra s'écrire symboliquement

$$(2) \qquad \frac{x}{e^x - 1} = e^{Bx}.$$

L'utilité de cette notation vient de la propriété suivante :

Si l'on multiplie le développement e^{Bx} par une autre exponentielle $e^{\alpha x}$, on aura aussi symboliquement

$$e^{Bx}\, e^{\alpha x} = e^{(B+\alpha)x}.$$

Cela veut dire que le développement en série de Maclaurin de la fonction du premier membre se fait par la formule

$$\frac{xe^{\alpha x}}{e^x - 1} = 1 + \frac{B+\alpha}{1} x + \frac{(B+\alpha)^2}{1.2} x^2 + \dots,$$

à condition de développer les puissances de $B+\alpha$ dans le second membre et de remplacer B^n par B_n.

En effet, le second membre de cette formule est, d'après la règle de multiplication des séries, le produit des développements de e^{Bx} et $e^{\alpha x}$. D'autre part, le développement en série de Maclaurin d'un produit de deux fonctions s'obtient en faisant, par la même règle, le produit des développements des facteurs, car l'exactitude des coefficients ainsi obtenus résulte de la règle de Leibnitz pour dériver un produit.

Revenons maintenant à l'équation (2). On peut chasser les dénominateurs (en vertu du principe de la multiplication des séries de Maclaurin que nous venons d'invoquer), et il vient

$$(3) \qquad x = e^{(B+1)x} - e^{Bx}.$$

Par suite, en égalant les coefficients de x^n, dans les deux membres, on obtient, pour $n > 1$, l'équation symbolique

$$(4) \qquad (B+1)^n - B^n = 0.$$

Elle fournit, pour $n = 2, 3, 4, \dots$, une suite d'équations récurrentes à coefficients entiers

$$2B_1 + 1 = 0, \qquad 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0 \dots$$

qui déterminent de proche en proche $B_1, B_2, \dots$ Donc *les nombres de Bernoulli sont rationnels*.

Nous savons que tous les B d'indice impair sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$. Quant aux B d'indice pair, ils ont pour valeurs :

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510},$$

$$B_{18} = \frac{43867}{798}, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22} = \frac{854513}{138}, \dots$$

On remarque, dans ce tableau, que *les nombres de Bernoulli d'indice pair sont de signes alternés.* C'est une règle générale, comme nous le démontrerons plus loin.

335. Propriétés des nombres de Bernoulli. — Multiplions la formule (2) par e^{yx} ; il vient

$$x e^{yx} = e^{(B+1+y)x} - e^{(B+y)x},$$

d'où, en égalant les coefficients de x^n de part et d'autre,

$$(5) \qquad n y^{n-1} = (B+1+y)^n - (B+y)^n .$$

Cette relation montre que l'identité

$$(6) \qquad f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y)$$

a lieu pour chaque terme d'un polynome $f(y)$, elle a donc lieu pour le polynome lui-même et c'est l'identité fondamentale à laquelle satisfont les nombres de Bernoulli.

On peut même étendre la formule (6) à certaines fonctions autres que des polynomes. Ainsi, si $f(y)$ est une série potentielle convergente, $\Sigma a_n y^n$; et si les séries $\Sigma a_n\,(y+B+1)^n$ et $\Sigma a_n\,(y+B)^n$ convergent, la formule (6) conservera un sens et sera exacte.

Voici quelques cas particuliers :

1°) Faisons, dans (5), $y = -\dfrac{1}{2}$; il vient

$$\left(B+\frac{1}{2}\right)^n - \left(B-\frac{1}{2}\right)^n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Faisant successivement $n = 2, 4, \ldots$ cette formule permet de vérifier de proche en proche que tous les B d'indice impair sont nuls à partir de B_3.

2°) Soit $f(y) = y\,(y+1)\,(y+2) \cdots (y+p)$; la formule (6) donne, pour $y = 0$,

$$(p+1)\,(B+1)\,(B+2) \cdots (B+p) = p\,!$$

3°) Soit $1 \leqslant q \leqslant p$; posons $f(y) = (y-1)^p y^q$, il vient, pour $y = 0$,

$$B^p (B+1)^q - B^q (B-1)^p = 0.$$

Cette forme, due à *Stern*, ne contient que les nombres d'indices compris entre q et $p+q$. C'est peut-être la plus commode pour le calcul.

336. Polynomes de Bernoulli. — Ce sont les polynomes $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v), \ldots$ définis par le développement de Maclaurin suivant :

$$(7) \quad \frac{e^{vx}-1}{e^x-1} = v + \varphi_1(v)\frac{x}{1} + \varphi_2(v)\frac{x^2}{2\,!} + \cdots + \varphi_n(v)\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Ces polynomes dépendent des nombres de Bernoulli et on obtient leur

expression symbolique en mettant la fonction génératrice sous la forme

$$(e^{vx}-1)\frac{e^{Bx}}{x}=\frac{e^{(B+v)x}-e^{Bx}}{x}.$$

Le coefficient de $x^n : n\,!$ sera

$$(8)\qquad \varphi_n(v)=\frac{(B+v)^{n+1}-B^{n+1}}{n+1}.$$

Les polynomes de Bernoulli fournissent l'expression générale des puissances semblables des nombres entiers. On a, en effet,

$$1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{(v-1)x}=\frac{e^{vx}-1}{e^x-1},$$

d'où, en égalant les coefficients de $x^n : n\,!$,

$$1+2^n+3^n+\cdots+(v-1)^n=\varphi_n(v).$$

337. Propriétés des polynomes de Bernoulli. — 1° *Les polynomes de Bernoulli s'annulent si* $v=0$ *ou si* $v=1$. C'est la conséquence immédiate des formules (8) et (4).

2° Pour déterminer $\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)$, considérons les relations

$$e^{\left(B+\frac{1}{2}\right)x}+e^{Bx}=e^{Bx}\left(e^{\frac{x}{2}}+1\right)=\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}-1}=2e^{\frac{Bx}{2}},$$

et égalons les coefficients de x^{n+1} dans les deux membres extrêmes ; il vient

$$\left(B+\frac{1}{2}\right)^{n+1}+B^{n+1}=2\left(\frac{B}{2}\right)^{n+1}$$

et on en conclut, par (8),

$$(9)\qquad \varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

Donc *les polynomes d'indice pair s'annulent pour* $v=\frac{1}{2}$.

3° Si l'on dérive la formule (8), il vient

$$\varphi'_n(v)=(B+v)^n=n\varphi_{n-1}(v)+B_n.$$

Il y a deux cas à distinguer : selon que $n=2k$ ou $2k+1$, on aura

$$(10)\qquad \begin{cases}\varphi'_{2k}(v)=2k\,\varphi_{2k-1}(v)+B_{2k},\\ \varphi'_{2k+1}(v)=(2k+1)\,\varphi_{2k}(v).\end{cases}$$

On en conclut encore, en dérivant une fois de plus,

$$(11)\qquad \varphi''_{2k}(v)=2k\,(2k-1)\,\varphi_{2k-2}(v).$$

4° *Un polynome $\varphi_{2k+1}(v)$ d'indice impair ne peut reprendre plus de deux fois la même valeur quand v varie de* 0 *à* 1.

En effet, s'il reprenait trois fois la même valeur, sa dérivée $(2k+1)\varphi_{2k}$ s'annulerait pour les valeurs 0, 1 et deux valeurs intermédiaires au moins, donc au moins quatre fois dans l'intervalle 0,1. Alors sa dérivée

$$(2k+1)[2k\varphi_{2k-1}+B_{2k}]$$

s'annulerait au moins trois fois, et φ_{2k-1} reprendrait au moins trois fois la même valeur dans l'intervalle 0,1. Il en serait de même de φ_{2k-3}, $\varphi_{2k-5}, \dots$ φ_1, ce qui est impossible, φ_1 étant du second degré.

En particulier, un polynome φ_n d'indice impair ne peut s'annuler pour $v=\frac{1}{2}$. Donc, par la formule (**9**), *aucun nombre de Bernoulli d'indice pair ne peut être nul.*

5° *Un polynome d'indice impair ne change pas de signe quand v varie de* 0 *à* 1. En effet, il ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant et, comme il s'annule aux deux limites, il s'annulerait trois fois, ce qui est impossible.

6° *Un polynome φ_{2k} d'indice pair s'annule pour les valeurs* 0, 1 *et* $\frac{1}{2}$ (voir 1° et 3°), *mais il ne s'annule pour aucune autre valeur de v entre* 0 *et* 1. En effet, si φ_{2k} s'annulait quatre fois, φ_{2k-1} reprendrait au moins trois fois la même valeur, comme on l'a montré dans la démonstration 4°, ce qui est impossible.

On en conclut que c'est pour $v=\frac{1}{2}$ que les polynomes d'indice impair prendront leur plus grande valeur absolue entre 0 et 1, puisque c'est la racine de leur dérivée.

7° *Deux polynomes consécutifs d'indice pair sont de signes contraires pour v compris entre* 0 *et* 1.

En effet, φ_{2k} s'annulant aux points 0 et $\frac{1}{2}$, sa dérivée s'annule pour une valeur intermédiaire v_0 ; et l'on a, par la formule de Taylor $(0<\theta<1)$,

$$\varphi_{2k}(v_0+t)=\varphi_{2k}(v_0)+\frac{t^2}{2}\varphi''_{2k}(v_0+\theta t) ;$$

d'où, pour $t=-v_0$, en ayant égard à (**11**),

$$0=\varphi_{2k}(v_0)+\frac{v_0^2}{2}2k(2k-1)\varphi_{2k-2}(\theta v_0).$$

Donc φ_{2k} et φ_{2k-2}, qui sont de signe invariable entre 0 et $\frac{1}{2}$, sont de signes contraires. De même, dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

8° *Deux polynomes consécutifs d'indice impair sont aussi de signes contraires dans l'intervalle* (0, 1).

En effet, $\varphi_{2k+1}(v)$ s'annule pour $v = 0$, par suite, pour v positif et suffisamment petit, ce polynome aura le signe de sa dérivée $(2k+1)\varphi_{2k}(v)$. Donc φ_{2k+1} a, dans tout l'intervalle $(0, 1)$, le signe de φ_{2k} dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et il n'y a qu'à appliquer la propriété précédente. Comme φ_1 est négatif, on voit que le signe de φ_{2k} entre 0 et $\frac{1}{2}$, ou celui de φ_{2k+1} entre 0 et 1, sera celui de $(-1)^{k+1}$.

Ce signe est, en vertu de l'équation (**9**), celui de $-B_{2k-2}$. Donc *les nombres* B *d'indice pair sont de signes alternés.*

9° *La fonction* $\varphi_n\left(\frac{1}{2} + u\right)$ *est une fonction paire de* u *si* n *est impair, une fonction impaire si* n *est pair.*

En effet, la fonction génératrice du développement :

$$\Sigma \left[\varphi_n\left(\frac{1}{2} + u\right) - \varphi_n\left(\frac{1}{2} - u\right)\right] \frac{x^n}{n!}$$

est la fonction paire de x :

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{2} + u\right)x} - e^{\left(\frac{1}{2} - u\right)x}}{e^x - 1} = \frac{e^{ux} - e^{-ux}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}.$$

Donc, les puissances impaires de x devant disparaître, $\varphi_{2k+1}\left(\frac{1}{2} + u\right)$ est une fonction paire. Alors $\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2} + u\right)$, qui est sa dérivée à un facteur numérique près, est impaire.

338. Développement des polynomes de Bernoulli en séries trigonométriques. — Ces développements dans l'intervalle $(0,1)$ sont donnés par les deux formules suivantes, que nous allons démontrer :

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi_{2k-1}(x) = (-1)^k 2 \dfrac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - \cos 2n\pi x}{n^{2k}}, \\ \varphi_{2k}(x) = (-1)^{k-1} 2 \dfrac{(2k)!}{(2\pi)^{2k+1}} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2n\pi x}{n^{2k+1}}. \end{cases}$$

Désignons par $\Phi_p(x)$ la première ou la seconde des deux sommes :

$$\sum_n \frac{\sin 2n\pi x}{n^p}, \qquad \sum_n \frac{\cos 2n\pi x}{n^p},$$

selon que p est impair ou pair. On aura, en tous cas,

$$\Phi'_p(x) = (-1)^{p-1} 2\pi\, \Phi_{p-1}(x).$$

Maintenant les deux formules (**12**) rentrent dans la formule générale

$$(13) \qquad \varphi_n = K_n \left[\Phi_{n+1}(x) - \Phi_{n+1}(0)\right]$$

où K_n est une constante convenable. Nous allons d'abord démontrer qu'il existe une relation de cette forme (**13**) quel que soit n. Pour cela,

nous allons vérifier qu'il existe une relation de cette forme pour $n = 1$, ensuite qu'une telle relation existant pour n, on en déduit une autre semblable pour $(n + 1)$.

D'abord, pour $n = 1$, je dis qu'on a

$$\varphi_1 = K_1[\Phi_2(x) - \Phi_2(0)].$$

En effet, les deux membres s'annulant pour $x = 0$, il suffit de montrer qu'ils ont même dérivée. Or, on a, entre 0 et 1, (voir n° 145).

$$\varphi'_1 = D\frac{x^2 - x}{2} = x - \frac{1}{2},$$

$$\Phi'_2 = -2\pi\,\Phi_1 = -2\pi\,\Sigma\frac{\sin 2n\pi x}{n} = 2\pi^2\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

et les dérivées seront les mêmes si $K_1 = 1 : 2\pi^2$.

Supposons maintenant la relation (**13**) vraie pour n. Il suffit de l'intégrer pour trouver l'analogue pour $n + 1$. En effet, φ_n et Φ_{n+1} sont respectivement les dérivées de φ_{n+1} et de Φ_{n+2} à un facteur et une constante additive près. On a donc, en intégrant et en désignant par K_{n+1}, A. B des constantes convenables,

$$\varphi_{n+1} = K_{n+1}\,[\Phi_{n+2}(x) - \Phi_{n+2}(0)] + Ax + B.$$

Mais A est nul parce que φ et Φ reprennent la même valeur aux limites 0 et 1, B l'est aussi parce que φ s'annule avec x. Donc l'équation (**13**) est générale.

Pour déterminer K_n, on dérive n fois l'équation (**13**), d'où

$$n\,!\,\varphi'_1 = K_n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2\pi)^n\,\Phi_1.$$

D'ailleurs les valeurs de φ'_1 et Φ_1 que nous venons d'écrire plus haut donnent $\Phi_1 : \varphi'_1 = -\pi$, ce qui conduit aux valeurs de K_n mises dans les équations (**12**).

Remarque. — Les propriétés 1°, 5°, 7°, 8° et 9° du n° 337 sont immédiatement apparentes dans les formules (**12**).

339. **Nouvelles expressions des nombres de Bernoulli.** — Portons dans la relation (**10**) les valeurs de φ'_{2k} et φ_{2k-1} tirées de (**12**) et posons, en général,

$$s_p = \sum_1^\infty \frac{1}{n^p};$$

la relation (**10**) se réduit à

$$B_{2k} = (-1)^{k-1}\,2\,\frac{(2k)\,!}{(2\pi)^{2k}}\,s_{2k}.$$

Quand k augmente, s_{2k} tend rapidement vers 1. Cette formule montre donc que les nombres de Bernoulli croissent très rapidement avec k.

Remarque. Cette valeur de B_{2k} nous permet de déterminer le rayon de convergence R du développement (1). D'après la théorie des séries potentielles, ce sera l'inverse de la plus grande limite de $\sqrt[n]{B_n : n\,!}$, donc

$$R = \lim \sqrt[2k]{\frac{(2k)\,!}{B_{2k}}} = 2\pi.$$

§ 4. Formule d'Euler et de Maclaurin. Relation entre les sommes et les intégrales.

340. Formule préalable. — Considérons la formule de Maclaurin :

$$(1)\quad f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} f^{2p}(0) + R_{2p+1}$$

avec l'expression du reste (t. 1, nº 403) :

$$R_{2p+1} = \frac{1}{(2p)\,!}\int_0^x f^{2p+1}(x-t)\, t^{2p}dt.$$

Remplaçons successivement dans cette formule la fonction f par ses dérivées f', f'',... en remplaçant, en même temps, $2p$ par $(2p-1)$, $(2p-2)$,... 1. Multiplions successivement ces équations par B_1x, $\frac{B_2x^2}{2\,!}$, $\frac{B_3x^3}{3!}$,... $\frac{B^{2p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)\,!}$, les B désignant les nombres Bernoulliens, et ajoutons-les membre à membre avec (1). Il viendra un résultat de la forme

$$[f(x)-f(0)] + \frac{B_1x}{1}[f'(x)-f'(0)] + \cdots + \frac{B_{2p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)\,!}[f^{2p-1}(x) - f^{2p-1}(0)]$$
$$= xf'(0) + A_2x^2 f''(0) + A_3x^3 f'''(0) + \cdots + A_{2p}x^{2p}f^{2p}(0) + R,$$

en posant

$$A_2 = \frac{1}{2!} + \frac{B_1}{1} = \frac{(1+B)^2 - B^2}{2\,!}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} + \frac{B_1}{2!\,1} + \frac{B_2}{2!} = \frac{(1+B)^3 - B^3}{3!}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!} + \frac{B_1}{3!\,1} + \frac{B_2}{2!\,2!} + \frac{B_3}{3!} = \frac{(1+B)^4 - B^4}{4!}$$

et, en désignant par R l'intégrale

$$\int_0^x dt\, f^{2p+1}(x-t)\left[\frac{t^{2p}}{(2p)!} + \frac{B_1xt^{2p-1}}{1.\,(2p-1)\,!} + \frac{B_2x^2t^{2p-2}}{2!\,(2p-2)\,!} + \cdots\right]$$

On remarque d'abord que tous les coefficients A_2, A_3,... sont nuls par les relations (3) du nº 334. Quant à l'expression entre crochets dans l'in-

tégrale R, elle revient à un polynome de Bernoulli (n° 336), car on peut l'écrire comme il suit :

$$\frac{(t+Bx)^{2p}-(Bx)^{2p}}{(2p)\,!}=x^{2p}\frac{\left(\frac{t}{x}+B\right)^{2p}-B^{2p}}{(2p)\,!}=\frac{x^{2p}}{(2p-1)\,!}\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right).$$

Il vient donc, φ désignant un polynome de Bernoulli,

$$(2)\qquad R=\frac{x^{2p}}{(2p-1)\,!}\int_0^x f^{2p+1}(x-t)\,\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)dt.$$

En se rappelant (n° 334) que tous les B d'indice impair sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$, nous avons ainsi obtenu la formule suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(x)-f(0)&=x\frac{f'(x)+f'(0)}{2}-\frac{B_2x^2}{2\,!}[f''(x)-f''(0)]-\dots\\ &-\frac{B_{2p-2}x^{2p-2}}{(2p-2)\,!}[f^{2p-2}(x)-f^{2p-2}(0)]+R.\end{aligned}\right.$$

341. Simplification de R. — Utilisons les propriétés des polynomes de Bernoulli (n° 337). Comme $\frac{t}{x}$ varie de 0 à 1 dans l'expression (**2**), $\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)$ ne change pas de signe (propriété 5°), et l'on peut poser par le théorème de la moyenne, θ étant compris entre 0 et 1 (en sorte que θx est une valeur intermédiaire de l'argument $x-t$).

$$R=\frac{x^{2p}}{(2p-1)\,!}f^{2p+1}(\theta x)\int_0^x\varphi_{2p-1}\left(\frac{t}{x}\right)dt.$$

Changeons encore t en tx dans l'intégrale, il viendra

$$R=\frac{x^{2p+1}}{(2p-1)\,!}f^{2p+1}(\theta x)\int_0^1\varphi_{2p-1}(t)\,dt.$$

L'intégration s'effectue immédiatement en remplaçant φ_{2p-1} par sa valeur donnée par l'équation (**10**) du n° 337, à savoir

$$\varphi_{2p-1}=\frac{\varphi'_{2p}-B_{2p}}{2p},$$

et en observant que l'intégrale de φ' est nulle, puisque φ s'annule aux deux limites 0 et 1 (n° 337). Il vient donc simplement

$$(4)\qquad R=-\frac{B_{2p}\,x^{2p+1}}{(2p)\,!}f^{2p+1}(\theta x).$$

342. Formule d'Euler et de Maclaurin. — Ce n'est qu'une transformation de la formule (**3**). Remplaçons dans le premier membre la fonction $f(x)$ par l'intégrale

$$\int_a^{a+x}f(x)\,dx=\int_0^x f(a+x)\,dx\,;$$

il faudra remplacer dans le second membre la dérivée $f^k(x)$ par $f^{k-1}(a+x)$ et cela pour $k = 1, 2, \ldots$; il viendra donc

$$(5)\left\{\begin{aligned}\int_a^{a+x} f(x)\,dx = x\,\frac{f(a+x)+f(a)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2\,!}\,[f'(a+x)-f'(a)] - \cdots \\ - \frac{B_{2p-2}\,x^{2p-2}}{(2p-2)\,!}\,[f^{2p-3}(a+x) - f^{2p-3}(a)] + R\end{aligned}\right.$$

et la valeur (4) de R deviendra $(0 < \theta < 1)$

$$(6)\qquad R = -\frac{B_{2p}\,x^{2p+1}}{(2p)\,!}\,f^{2p}(a+\theta x).$$

La formule (5) est la *formule d'Euler et de Maclaurin*, mais complétée par l'expression du reste que ces géomètres n'ont pas donnée. Comme les nombres B_2, B_4... croissent rapidement en valeur absolue, cette formule deviendrait le plus souvent divergente si l'on faisait croître p indéfiniment. Mais, en donnant à p une valeur convenable, on pourra généralement faire en sorte que R soit suffisamment petit pour être négligé en pratique, l'expression (6) de R permettant d'agir en sûreté.

On se sert de la formule d'Euler et de Maclaurin pour ramener le calcul des intégrales au calcul des sommes et réciproquement. C'est ce que nous allons montrer.

343. Application au calcul approché des intégrales définies. — Pour appliquer la formule (5) au calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, il suffit évidemment de poser $x = b - a$. Mais, si l'intervalle d'intégration est un peu grand, il convient, pour obtenir plus d'exactitude, de le décomposer en plusieurs parties. Posons $h = \frac{b-a}{n}$; on aura

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{a+h} + \int_{a+h}^{a+2h} + \cdots + \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f\,dx.$$

Appliquons à chacune de ces intégrales partielles la formule (5), où l'on remplacera x par h, et ajoutons les résultats ; il viendra

$$(7)\left\{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) + \frac{f(b)}{2}\right] \\ - \frac{B_2 h^2}{2\,!}\,[f'(b) - f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4!}[f'''(b) - f'''(a)] - \cdots \\ - \frac{B_{2p-2}\,h^{2p-2}}{(2p-2)\,!}\,[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)] + R\end{aligned}\right.$$

et le reste R sera donné par la formule

$$R = -n\mu\,\frac{B_{2p}\,h^{2p+1}}{(2p)\,!},$$

μ désignant une valeur moyenne de $f^{2p}(x)$ entre a et b.

La formule (7) est celle que nous voulions obtenir. Le terme écrit sur la première ligne au second membre est susceptible d'une interprétation géométrique : il représente la somme des trapèzes inscrits dans la courbe $y = f(x)$ et déterminés par des ordonnées équidistantes. Quant au premier membre, il représente l'aire de la courbe.

344. Formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin. — Réciproquement, la formule (7) peut servir à ramener le calcul d'une somme à celui d'une intégrale définie. Posons, b étant égal à $a + nh$,

$$\sum_a^{b-h} f(x) = f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h).$$

On tirera de la formule (7)

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_a^{b-h} f(x) &= \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(b)-f(a)}{2} + \frac{B_2 h}{2!}[f'(b)-f'(a)] + \cdots \\ &\quad + \frac{B_{2p-2}h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)] + n\mu\frac{B_{2p}h^{2p}}{(2p)!} \end{aligned} \right.$$

C'est la *formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin* complétée par l'expresssion du reste. Elle est souvent très utile quand la quadrature indiquée s'effectue simplement.

345. Expression symbolique de la formule d'Euler et de Maclaurin. Intégration aux différences d'un polynome. — Soit $f(y)$ un polynome. Faisons successivement $y = 1, 2, \ldots (n-1)$ dans la formule (6) du nº 355 et ajoutons ; il vient

$$f'(0) + f'(1) + \cdots + f'(n-1) = f(B+n) - f(B).$$

On généralise cette formule en remplaçant la fonction $f(y)$ par $f(a+hy)$ considérée comme fonction de y ; elle devient ainsi

$$(9) \qquad \sum_{y=0}^{n-1} f'(a+hy) = \frac{f[a+(B+n)h] - f(a+Bh)}{h}$$

C'est la formule la plus élégante pour la sommation d'un polynome. Ce n'est d'ailleurs qu'une expression symbolique de celle d'Euler et de Maclaurin (où f est remplacée par f') dans le cas où cette formule est limitée et le reste nul.

Si f n'est pas un polynome, on peut encore considérer la formule (9) comme une expression symbolique de celle d'Euler et de Maclaurin prolongée à l'infini, mais elle n'est plus légitime que si le reste de la formule (8) tend vers zéro, ce qui sera l'exception.

§ 5. Interpolation.

346. Objet de l'interpolation. — L'objet de l'interpolation est de trouver une fonction d'une variable, connaissant les valeurs de cette

fonction pour un certain nombre de valeurs données de la variable. Ce problème est indéterminé tant qu'on ne fixe pas la forme de la fonction cherchée, car il revient à faire passer une courbe par des points donnés, ce qui peut se faire d'une infinité de manières tant que la courbe n'est pas définie. Le problème de l'interpolation devient déterminé quand la forme de la fonction est donnée et qu'elle renferme autant de paramètres distincts qu'il y a de valeurs données de la fonction. Ainsi une fonction entière de degré $n-1$ renferme n paramètres et peut se déterminer si l'on donne n valeurs de la fonction.

347. Formule d'interpolation de Lagrange. — Le polynome y de degré $n-1$ qui prend n valeurs données $y_1, y_2, \ldots y_n$ pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ de x est unique. En effet, s'il y en avait deux, leur différence, qui est de degré $n-1$ au plus, ayant n racines $x_1, \ldots x_n$, serait identiquement nulle, et les deux polynomes seraient identiques.

On peut écrire immédiatement le polynome P_1 de degré $n-1$ qui prend la valeur 1 pour $x = x_1$ et s'annule pour $x = x_2, x_3, \ldots x_n$. C'est

$$P_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}.$$

Le polynome P_i, égal à 1 pour $x = x_i$ et nul pour les autres valeurs x_k, se déduit du précédent par la permutation des indices 1 et i. Par suite, le polynome y de degré $n-1$ qui prend les valeurs $y_1, \ldots y_n$ aux points $x_1, \ldots x_n$ s'exprime par la formule

$$(1) \qquad y = y_1 P_1 + y_2 P_2 + \cdots + y_n P_n.$$

C'est la *formule d'interpolation de Lagrange*, qui est très utile dans les raisonnements, mais se prête mal au calcul.

348. Formule d'interpolation de Newton. — Soit $f(x)$ une fonction quelconque. Proposons-nous de déterminer le polynome y de degré $n-1$ qui prend les valeurs $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ aux points $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Désignons, en général, par Q_i le polynome de degré $i-1$ qui prend les valeurs $f(x_1), f(x_2) \cdots f(x_i)$ aux points $x_1, x_2, \ldots x_i$. Nous serons conduits à la formule de Newton en écrivant le polynome y sous la forme

$$y = Q_1 + \sum_{i=2}^{n} (Q_i - Q_{i-1});$$

mais il faut transformer les termes de cette somme. Le polynome

$Q_i - Q_{i-1}$ de degré $i-1$ s'annule (d'après sa définition) aux points $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$. Il ne diffère donc du produit $(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})$ que par un facteur constant, égal au coefficient de x^{n-1} dans $Q_i - Q_{i-1}$, donc dans Q_i, c'est-à-dire, d'après l'expression de Q_i par la formule de Lagrange, égal à

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_i)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)\cdots(x_2-x_i)} + \cdots + \frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})}$$

Ce coefficient est donc une fonction symétrique de $x_1, \ldots x_i$ et nous désignerons cette fonction par

$$f(x_1, x_2, \ldots x_i).$$

Ainsi la valeur de y peut s'écrire

$$(2)\quad \begin{cases} y = f(x_1) + (x-x_1)f(x_1,x_2) + (x-x_1)(x-x_2)f(x_1,x_2,x_3) + \cdots \\ \qquad + (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_1, x_2, \ldots x_n). \end{cases}$$

Telle est la *formule d'interpolation de Newton* pour former le polynome y de degré $n-1$ qui prend les n valeurs données $f(x_k)$ aux points x_k.

On donne à $f(x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3), \ldots$ les noms de *première, deuxième,... fonction interpolante* de $f(x)$. On les calcule par un procédé de proche en proche que nous allons faire connaître.

349. Calcul des fonctions interpolantes. — Si l'on fait $x = x_n$ dans la formule de Newton (2), elle donne $f(x_n)$; par conséquent, si l'on remplace x_n par x, on aura, quel que soit x, *l'identité*

$$(3)\quad \begin{cases} f(x) = f(x_1) + (x-x_1)f(x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad + (x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \\ \qquad + (x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})f(x_1, \ldots x_{n-1}, x). \end{cases}$$

Si l'on soustrait de cette identité celle qu'on en déduit en remplaçant n par $n-1$, on en conclut

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x) = \frac{f(x_1, \ldots x_{n-2}, x) - f(x_1, \ldots x_{n-2}, x_{n-1})}{x - x_{n-1}}.$$

Il vient donc pour $n = 2, 3, \ldots$ le système de formules :

$$f(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \qquad f(x_1, x_2, x) = \frac{f(x_1, x) - f(x_1, x_2)}{x - x_2}, \ldots$$

fournissant un procédé systématique pour calculer de proche en proche les fonctions interpolantes.

350. Reste de la formule d'interpolation de Newton. — Etablissons d'abord une propriété générale des fonctions interpolantes, dans l'hypothèse où $f(x)$ est dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$. Désignant encore par y le polynome défini par la formule (2), considérons la différence $f(x)-y$. Elle s'annule aux points $x_1,\dots x_n$; donc, en appliquant le théorème de Rolle, on en conclut que ses dérivées 1re, 2e,... $(n-1)$me s'annulent au moins $n-1$, $n-2$,... 1 fois respectivement dans un intervalle contenant ces valeurs. Soit donc ξ la racine de la dernière dérivée, qui est une moyenne entre $x_1,\dots x_n$; on a

$$0 = f^{(n-1)}(\xi) - D^{n-1}y = f^{(n-1)}(\xi) - (n-1)!\,f(x_1,\dots x_n),$$

d'où la propriété en question :

$$f(x_1,\dots x_n) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}. \tag{4}$$

Revenons maintenant à la formule de Newton.

Transformons, par la propriété précédente, le dernier terme de la formule (3), mais après y avoir changé n en $n+1$. Il vient

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1) + (x-x_1)f(x_1, x_2) + \cdots \\ + (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_1, x_2,\dots x_n) + \mathrm{R}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{R} = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

où ξ est maintenant une moyenne entre $x_1,\dots x_n$, x.

Donc R représente l'erreur que l'on commet quand on calcule approximativement $f(x)$ par la formule (2) ou par la formule d'interpolation de Newton. C'est pourquoi R s'appelle le *reste de la formule de Newton* ; et l'expression que nous venons de lui donner rappelle celle du reste de la formule de Taylor.

351. Formule de Newton dans le cas de valeurs de x équidistantes. — Considérons le cas où les valeurs successives x_0, x_1, x_2,... sont en progression arithmétique. En changeant au besoin x en $x+x_0$, on peut faire en sorte que ces valeurs soient

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = h, \qquad x_2 = 2h,\dots \qquad x_n = nh.$$

Soient y_0, y_1,..., y_n les valeurs correspondantes du polynome y de degré n à déterminer. L'expression de ce polynome par la formule de Newton peut se déduire immédiatement d'une formule du calcul des différences.

Formons, en effet, les différences successives Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots \Delta^n y_0$; nous aurons

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \cdots$$

Ce développement se termine de lui-même au terme qui renferme $\Delta^m y_0$. Remplaçons dans ce développement m par $x : h$ et poursuivons le développement jusqu'au terme en $\Delta^n y_0$; nous pouvons poser

$$y = y_0 + \frac{x}{h}\frac{\Delta y_0}{1} + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 y_0}{1.2} + \cdots$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\cdots\left(\frac{x}{h} - n + 1\right)\frac{\Delta^n y_0}{1.2\ldots n}.$$

L'exactitude de cette formule se vérifie immédiatement, car ce développement se réduit à celui de y_m quand $x = mh$. C'est l'expression très simple de la formule de Newton pour le cas des valeurs équidistantes et elle se rattache au calcul des différences.

On peut mettre en évidence l'analogie de cette formule avec celle de Maclaurin. Posons, d'après la notation des produits équidifférents,

$$x^{[p]} = x(x-h)\cdots(x - ph + h)$$

et remplaçons h par Δx ; il vient

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{x^{[2]}}{1.2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \cdots + \frac{x^{[n]}}{1.2\ldots n}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}.$$

Cette formule ne peut d'ailleurs pas être autre que la formule (2) adaptée au cas actuel, puisqu'elle se complète, comme elle, d'un terme par le changement de n en $n+1$ et, par conséquent, les termes de même rang sont identiques.

352. Formules d'approximation pour les quadratures. — Les formules d'interpolation peuvent servir au calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

lorsque cette quadrature ne peut se faire exactement. On remplace, à cet effet, la courbe $y = f(x)$ par une autre que l'on sait intégrer.

On peut remplacer $f(x)$ par un polynome de degré n à l'aide de la formule de Lagrange. Cela revient à remplacer la courbe $y = f(x)$ par une parabole du n^{me} degré ayant $n+1$ points communs avec elle. Si les abscisses de ces points sont en progressiou arithmétique, on obtient la *méthode d'intégration de Cotes et de Newton*, qui est d'ailleurs peu recommandable.

Gauss a considérablement amélioré la méthode précédente en modifiant le choix des points de subdivision de manière à augmenter l'approximation. Mais l'exposition complète de la *méthode de Gauss* exige trop de calculs pour trouver place ici.

Au lieu de faire l'interpolation dans l'intervalle (a, b) tout entier, on peut partager cet intervalle en parties consécutives et interpoler dans chaque partie. On peut remplacer $f(x)$ par une suite de polynomes du premier degré, c'est-à-dire la courbe par une suite de droites, et l'on obtient la *formule des trapèzes*.

On peut aussi remplacer $f(x)$ par une suite de polynomes du deuxième ou du troisième degré, c'est-à-dire la courbe par une suite d'arcs de paraboles, et, en supposant les intervalles égaux, on obtient la *formule de Simpson* (t. I, nº 367).

353. Expression empirique de certaines lois. — Quand la loi exacte des variations de certaines quantités n'est pas connue, comme cela a lieu pour la plupart des phénomènes naturels, on peut recourir aux formules d'interpolation. On détermine les valeurs de la fonction pour une série de valeurs de la variable et les formules d'interpolation fournissent une règle empirique pour calculer les valeurs de la fonction pour d'autres valeurs de la variable. Les formules ainsi établies ne méritent généralement que peu de confiance.

CHAPITRE IX.

Applications géométriques complémentaires.

§ 1. Points singuliers des courbes planes.

354. Points ordinaires et points singuliers. — Considérons l'équation d'une courbe plane, en axes rectangulaires ou obliques,

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

et supposons que f soit une fonction continue et uniforme *indéfiniment dérivable* dans le voisinage du point M (a, b) de la courbe.

Si $f'_y(a, b)$ n'est pas nul, l'équation (1) n'a, dans le voisinage du point M, qu'une seule solution, $y = \varphi(x)$, ce qui représente une seule branche continue de courbe, passant par le point M, et douée d'une tangente déterminée dont la direction varie d'une manière continue avec la position du point de contact. C'est la conséquence du théorème général sur l'existence des fonctions implicites (t. 1, nº 173). Un point M qui possède ces caractères s'appelle un *point ordinaire* de la courbe.

Si f'_y était nul au point M mais f'_x différent de 0, on pourrait résoudre l'équation (1) par rapport à x et la conclusion serait analogue.

Donc, si nous appelons *points singuliers* les points qui ne possèdent pas les caractères énumérés plus haut, nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

Quand $f(x, y)$ et toutes ses dérivées sont continues et uniformes, la courbe $f(x, y) = 0$ n'a d'autres points singuliers que ceux dont les coordonnées a et b satisfont simultanément aux trois équations :

$$f(a, b) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Donc, dans ce cas, pour trouver les points singuliers de la courbe, il faut chercher les systèmes de solutions des trois équations précédentes.

355. Points singuliers de divers ordres. — Soit $M(a, b)$ un point singulier. Développons $f(x, y)$ par la formule (limitée) de Taylor suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$. Comme f, f'_x et f'_y s'annulent au point M par hypothèse, les termes des ordres 0 à 1 disparaissent et le développement débute par les termes du second ordre. On a donc

$$f(x, y) = \varphi_2 + \varphi_3, + \cdots + \varphi_{n-1} + R_n,$$

en désignant par $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ des polynomes homogènes en $(x-a)$ et $(y-b)$ de degrés 2, 3,... et par R_n le terme complémentaire.

Si l'ensemble des termes du second ordre, à savoir

$$\varphi_2 = \frac{(x-a)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + (x-a)(x-b)\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + \frac{(y-b)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2},$$

ne disparaît pas identiquement comme les précédents, c'est-à-dire si l'une au moins des dérivées secondes de f ne s'annule pas au point M, on dit que M est un *point singulier du second ordre* (1).

Si, au contraire, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_{n-1}$ sont identiquement nuls mais que φ_n ne le soit pas, on dit que le point $M(a, b)$ de la courbe est un *point singulier de l'ordre n* (2).

356. Points singuliers du second ordre. — D'après ce qui précède, un point singulier du second ordre $M(a, b)$ de la courbe $f(x, y) = 0$, est caractérisé par ce fait que le développement de $f(x, y)$ suivant les puissances de $x-a$, $y-b$ est de la forme

$$f(x, y) = \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$$

où φ_2 n'est pas identiquement nul.

La forme de la courbe dans le voisinage du point M est liée aux propriétés de l'équation homogène du second degré $\varphi_2 = 0$, qui représente un faisceau de deux droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, passant par M.

Désignons, en effet, par Δ le discriminant de φ_2, à savoir

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial b^2};$$

(1) On dit *un point double* dans la théorie des fonctions analytiques, parce qu'il passe par ce point deux branches réelles ou imaginaires. Nous nous plaçons ici au point de vue exclusif des variables réelles.

(2) On dit *un point multiple* d'ordre n dans la théorie des fonctions analytiques, parce qu'il y passe n branches réelles ou imaginaires.

Nous aurons le théorème suivant, dont nous allons expliquer les termes et donner la démonstration :

THÉORÈME. — 1° *Si l'on a* $\Delta < 0$, *ou, ce qui revient au même, si les deux droites du faisceau sont imaginaires, le point* M *est un* POINT ISOLÉ.

2° *Si l'on a* $\Delta > 0$, *ou si les deux droites du faisceau sont réelles et distinctes, le point* M *est un* POINT DOUBLE A TANGENTES DISTINCTES, *c'est-à-dire que la courbe possède deux branches passant par* M *et respectivement tangentes aux deux droites du faisceau* (fig. 2).

3° *Si l'on a* $\Delta = 0$, *ou si les deux droites du faisceau se confondent, il y a doute sur la forme de la courbe, mais, sauf exception, le point M sera un* POINT DE REBROUSSEMENT *de première espèce* (fig. 3).

Pour simplifier l'écriture, supposons qu'on ait préalablement transporté l'origine au point M ; nous sommes ramenés à étudier la courbe $f(x, y) = 0$ dans le voisinage de l'origine. Développons $f(x, y)$ par la formule de Maclaurin suivant les puissances de x, y, les termes du second ordre ne disparaissent pas et l'on a

$$f(x, y) = \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{n-1} + R_n,$$

les φ désignant maintenant des polynomes homogènes en x, y de degrés marqués par l'indice, et R_n le terme complémentaire.

Faisons ici une remarque importante. Quel que soit le point (x, y), l'un au moins des deux rapports $y : x$ ou $x : y$ ne surpasse pas l'unité en valeur absolue. Donc on peut toujours trouver les points de la courbe en posant successivement dans son équation $y = ux$, puis $x = vy$ et en cherchant, dans le premier cas, les valeurs *finies* de u et, dans le second, les valeurs *finies* de v qui satisfont à l'équation transformée de la courbe.

Il faut encore s'assurer de la forme que prend le terme complémentaire R_n par la substitution $y = ux$ (les conclusions étant évidemment analogues pour la substitution $x = vy$). Posons, en abrégé,

$$F(x) = f(x, ux).$$

Par la substitution $y = ux$, le développement de $f(x, y)$ écrit plus haut se transforme dans celui de $F(x)$ suivant les puissances de x ; R_n se transforme dans le reste correspondant, qui est de la forme (t. I, n° 403, form. 2)

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 F^{(n)}(tx)\,(1-t)^n\,dt.$$

Comme les dérivées de F s'expriment linéairement à l'aide des dérivées partielles de $f(x, y)$, on voit que, par la substitution $y = ux$, R_n prend la forme

$$R_n = x^n \psi(u, x),$$

où $\psi(u, x)$ désigne comme f une fonction continue *indéfiniment dérivable*, pourvu que x soit suffisamment petit (auquel cas, le point x, y est voisin de l'origine).

Arrivons maintenant à la démonstration du théorème, le point M étant pris comme origine.

Premier cas. $\Delta < 0$. — Les droites du faisceau sont imaginaires. L'origine est alors à distance finie de tout autre point de la courbe et l'on dit que l'origine est un *point isolé*. Nous allons le prouver.

Mettons l'équation de la courbe sous la forme

$$\varphi_2(x, y) + R_3 = 0.$$

Posons d'abord dans cette équation $y = ux$ et divisons par x^2 ; il vient, eu égard à l'expression précédente de R_n,

$$\varphi_2(1, u) + x\psi(u, x) = 0,$$

où ψ garde une valeur finie quand x tend vers 0 (u restant fini). Or $\varphi_2(1, u)$, ayant ses racines imaginaires, reste supérieur à un nombre fixe en valeur absolue. L'équation précédente devient donc impossible quand x tend vers 0. De même, si l'on posait $x = vy$, on serait conduit à une relation impossible quand y tend vers 0. Donc la courbe n'a aucun point dans le voisinage de l'origine.

Deuxième cas. $\Delta > 0$. — Si les droites sont réelles et distinctes, la courbe possède deux branches qui se coupent à l'origine et qui sont respectivement tangentes à chacune des droites du faisceau (fig. 2).

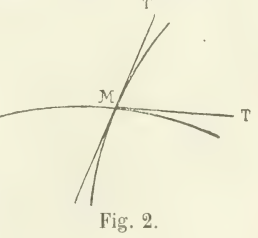


Fig. 2.

Prenons les deux droites du faisceau comme axes coordonnés ; $\varphi_2(x, y)$ se réduira au seul terme xy, à part un coefficient qu'on rend égal à l'unité en divisant toute l'équation par ce facteur. On ramène ainsi l'équation de la courbe à

$$xy + R_3 = 0.$$

Faisons d'abord la substitution $y = ux$ où u doit rester fini, R_3 prend la forme $x^3\psi(u, x)$, et, en divisant par x^2, il vient

$$u + x\psi(u, x) = 0.$$

Cette équation prouve que u tend vers 0 avec x. C'est l'équation d'une courbe dans le plan u, x, que nous appellerons la courbe (u, x) pour la distinguer de la courbe (x, y). Pour cette courbe (u, x), l'origine est un point ordinaire, car il y a un terme du premier degré en u. Donc il existe une solution u et une seule en fonction de x et elle est infiniment petite avec x.

En remplaçant $\psi(u, x)$ par $\psi(0, x) + u\,\psi'_u(\theta u, x)$ où $0 < \theta < 1$, on voit que cette solution vérifie la relation

$$u = \frac{x\psi(0, x)}{1 - u\psi'_u(\theta u, x)}.$$

Si $\psi(0, 0)$ n'est pas nul, les valeurs principales de u puis de y sont

$$u = -x\psi(0, 0), \qquad y = -x^2\psi(0, 0).$$

Cette dernière relation est l'équation approchée d'une branche de courbe tangente à l'axe des x à l'origine et sans inflexion en ce point.

Si $\psi(0, 0)$ est nul, les valeurs principales de u et de y sont respectivement celles de $-x\psi(0, x)$ et de $-x^2\psi(0, x)$. Il y a donc inflexion ou non, selon que le développement de $\psi(0, x)$ suivant les puissances de x débute par un terme d'ordre impair ou d'ordre pair.

On montre de même, par la substitution $x = vy$, que la courbe possède une seconde branche, tangente à l'axe des y, et elle ne peut en avoir d'autre dans le voisinage de l'origine.

La courbe la plus simple présentant un point double à tangentes distinctes est le *folium* de Descartes, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Troisième cas. $\Delta = 0$. — Les deux droites du faisceau se confondent; en prenant cette droite pour axe des x et divisant par une constante, l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \cdots = 0.$$

Aucun point infiniment voisin de l'origine ne s'obtient par la substitution $x = vy$ où v reste fini, car, après cette substitution, suppression du facteur y^2 et dans l'hypothèse de y infiniment petit, l'équation

se réduit à $1 = 0$, ce qui est possible. Il suffit donc d'étudier la substitution $y = ux$. Après division par x^2, elle fournit la relation

$$u^2 + x\varphi_3(1, u) + x^2\varphi_4(1, u) + \cdots = 0,$$

qui montre d'abord que u est infiniment petit avec x.

En général, $f(x, y)$ contient un terme en x^3, dont le coefficient $\varphi_3(1, 0)$ n'est pas nul et la relation précédente contient un terme du premier degré en x, alors l'origine est un point ordinaire pour la courbe (u, x). Il existe une valeur x, fonction de u, et une seule qui vérifie l'équation au voisinage de l'origine ; elle a pour valeur principale

$$x = -\frac{u^2}{\varphi_3(1, 0)} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u = \pm\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)}, \\ y = \pm x\sqrt{-x\varphi_3(1, 0)}. \end{cases}$$

Ces deux valeurs de y sont de signes contraires et ne sont réelles que si x a le signe de $-\varphi_3(1, 0)$. Donc la courbe n'existe que d'un seul côté de l'axe des y, mais se compose de deux branches qui touchent l'axe des x à l'origine et s'arrêtent en ce point. Ces deux branches sont situées de part et d'autre de leur tangente commune et l'on dit que l'origine est *un point de rebroussement de première espèce* (fig. 3).

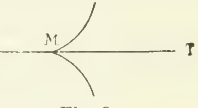


Fig. 3.

Toutefois cette conclusion suppose que $f(x, y)$ contienne un terme en x^3, sinon il y a *doute* et il faut un nouvel examen.

La courbe la plus simple présentant un point de rebroussement de première espèce à l'origine est $y^2 + x^3 = 0$.

357. Discussion du cas douteux. — Quand les termes du second degré forment un carré y^2 mais qu'il n'y a pas de termes en x^3, les choses se compliquent. Supposons qu'on ait, en développant $f(x, y)$,

$$y^2 + (b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + (a_4x^4 + b_4x^3y + \cdots) + (a_5x^5 + b_5x^4y + \cdots) + \cdots = 0.$$

Substituons $y = ux$, divisons par x^2 et ordonnons ; il vient

$$(u^2 + b_3ux + a_4x^2) + (a_5x^3 + b_4x^2u + c_3xu^2) + \cdots = 0.$$

Donc l'origine est *un point singulier du second ordre* pour la courbe (u, x). Nous sommes amenés à recommencer sur cette courbe la discussion déjà faite pour la courbe (x, y). Concluons donc :

1°) Si le trinome $(u^2 + b_3u + a_4)$ a ses racines imaginaires, l'origine est un *point isolé* pour la courbe (u, x), donc aussi pour la courbe (x, y),

2°) Si ce trinome a ses racines α et β réelles et distinctes, la courbe (u, x) possède deux branches respectivement tangentes à l'origine aux droites $u = \alpha x$ et $u = \beta x$; donc la courbe (x, y) possède deux branches correspondantes, ayant pour équations approchées $y = \alpha x^2$ et $y = \beta x^2$, par conséquent, toutes deux tangentes à l'axe des x. Elles sont du même côté ou de part et d'autre de cet axe selon que α et β sont de même signe ou non. Si l'une des racines α, β est nulle, les valeurs correspondantes de u et de y seront d'ordre plus élevé en x et la branche correspondante de la courbe (x, y) pourra exceptionnellement présenter un point d'inflexion. Dans ces divers cas, on dit que l'origine est un *point double à tangentes confondues* (fig. 4). Par exemple, ce sera le cas pour la courbe $y^2 (1 + x) = x^4$.

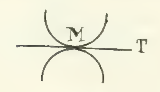


Fig. 4.

3° Si le trinome $(u^2 + b_3 ux + a_4 x^2)$ est un carré $(u - \alpha x)^2$ et qu'on ne retombe pas une seconde fois sur le cas douteux, la courbe (u, x) est tangente à la droite $(u - \alpha x) = 0$ et possède à l'origine un point de rebroussement de première espèce. Ses deux branches ont, d'après le n° précédent, pour équations approchées :

$$(u - \alpha x) = \pm x \sqrt{mx}$$

et les équations des deux branches correspondantes de la courbe (x, y) sont approximativement

$$y = x^2 (\alpha \pm \sqrt{mx}).$$

Ces deux branches sont tangentes à l'axe des x à l'origine mais s'arrêtent en ce point. Elles sont situées du même côté de leur tangente, pourvu que α ne soit pas nul, et l'on dit alors que l'origine est un *point de rebroussement de deuxième espèce* (fig. 5).

M T

Fig. 5.

La courbe la plus simple ayant un point de rebroussement de deuxième espèce à l'origine est $(y - x^2)^2 = x^5$.

Exceptionnellement, il peut arriver que l'on retombe encore une fois sur le cas douteux, alors il faut recommencer une troisième fois les mêmes raisonnements et ainsi de suite. Si l'on arrive à une solution, l'origine ne peut être qu'un point isolé, un point double (à tangentes distinctes ou non), ou un point de rebroussement (de première

ou de deuxième espèce). Mais, si le cas douteux se reproduit indéfiniment, la méthode n'aboutit pas.

Cet insuccès ne peut se produire si la courbe est algébrique, c'est-à-dire si $f(x, y)$ est un polynome, car à chaque nouvelle discussion il faut faire intervenir des termes de f en plus et un polynome ne contient qu'un nombre limité de termes.

358. Points multiples d'ordre supérieur. — Supposons maintenant que l'origine soit un point singulier d'ordre n de la courbe

$$f(x, y) = 0.$$

Le développement de $f(x, y)$ par la formule Maclaurin débutera par les termes de l'ordre n. Cela revient à dire que f s'annule à l'origine ainsi que ses dérivées d'ordre $< n$, mais qu'une au moins des dérivées d'ordre n ne s'annule pas. L'équation de la courbe se met sous la forme

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n+1}(x, y) + \cdots = 0.$$

Nous allons montrer que les propriétés de la courbe dans le voisinage de l'origine sont liées à celles de l'équation homogène d'ordre n

$$\varphi_n(x, y) = 0,$$

qui représente un faisceau de n droites, réelles ou imaginaires, passant par l'origine. Les développements donnés précédemment pour le cas où $n = 2$ nous permettent d'abréger pour le cas général.

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe, infiniment voisin de l'origine 0. Désignons par r la distance OM et par λ, μ les coefficients directeurs de OM. Substituons dans l'équation de la courbe les valeurs $x = \lambda r$, $y = \mu r$ et divisons par r^n ; il vient

$$\varphi_n(\lambda, \mu) + r\varphi_{n+1}(\lambda, \mu) + \cdots = 0.$$

Donc, si r est infiniment petit, les coefficients directeurs λ, μ diffèrent infiniment peu d'une solution de $\varphi_n(\lambda, \mu) = 0$. On en conclut que toute branche de courbe passant par l'origine est nécessairement tangente à l'une des droites du faisceau $\varphi_n(x, y) = 0$. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *Toute branche (réelle) de la courbe est nécessairement tangente à une droite réelle du faisceau $\varphi_n(x, y) = 0$. En particulier, si tout le faisceau est imaginaire, l'origine est un point isolé.*

En vertu de ce théorème, on est ramené à examiner séparément

chaque droite du faisceau pour reconnaître s'il lui correspond une branche tangente et de quelle nature.

Considérons, en particulier, une droite d'ordre k de multiplicité du faisceau ($k \leqslant n$). En la prenant comme axe des x, on fera apparaître dans $\varphi_n(x, y)$ le facteur y^k et l'équation de la courbe deviendra

$$y^k \psi_{n-k}(x, y) + \psi_{n+1}(x, y) + \cdots = 0,$$

les ψ désignant des polynomes homogènes du degré indiqué par l'indice et dont le premier ne contient plus y en facteur.

Posons $y = ux$ dans l'équation de cette courbe que nous appellerons la courbe (x, y), et divisons par x^n ; nous trouvons une courbe (u, x) :

$$u^k \psi_{n-k}(1, u) + x \psi_{n+1}(1, u) = 0.$$

L'étude d'une branche de la courbe (x, y) tangente à l'axe des x, revient à celle de la courbe (u, x) dans le voisinage de l'origine, car u doit être infiniment petit pour que y soit infiniment petit par rapport à x et, si l'on connaît une valeur principale de u, on connaît une valeur principale de y ou de ux. De là, les conclusions suivantes :

Premier cas. *La courbe* (u, x) *a un point simple à l'origine.* — C'est le cas ordinaire et il peut avoir lieu dans deux hypothèses : *a*) si $k = 1$; *b*) si k est > 1 mais que $\psi_{n+1}(1, 0)$ ne soit pas nul.

a) Si $k = 1$, l'équation de la courbe (u, x) renferme un terme du premier degré en u, car $\psi_{n-k}(1, 0)$ n'est pas nul ; donc u a une valeur et une seule en fonction de x, sa valeur principale se tire de l'équation

$$u \psi_{n-1}(1, 0) + x \psi_{n+1}(1, 0) = 0$$

et il en résulte une seule valeur de y, toujours réelle. Donc, *à toute droite réelle simple du faisceau, correspond une branche qui la touche à l'origine.*

b) Si k est > 1 mais que $\psi_{n+1}(1, 0)$ ne soit pas nul, l'équation de la courbe (u, x) contient un terme du premier degré en x, et x a une valeur et une seule en fonction de u. Sa valeur principale se tire de l'équation

$$u^k \psi_{n-k}(1, 0) + x \psi_{n+1}(1, 0) = 0 ;$$

elle est de la forme $x = m u^k$, en désignant par m une constante non

nulle. On en tire, inversement, les valeurs principales de u puis de y :

$$y = ux = x\sqrt[k]{\frac{x}{m}}.$$

Si k est impair, le radical a une seule valeur réelle qui change de signe avec x et alors y ne change pas de signe. Donc *une droite multiple d'ordre impair est tangente à uue branche sans inflexion.*

Si k est pair, le radical n'est réel que si x a le signe de m, auquel cas il a deux valeurs de signes contraires. Donc *une droite multiple d'ordre pair est tangente en un point de rebroussement (de première espèce).*

Par exemple, l'origine est un point singulier du 5e ordre pour la courbe

$$x^2y^3 = x^6 + y^6 ;$$

l'axe des x (droite triple) est une tangente ordinaire et l'axe des y (droite double) une tangente de rebroussement.

Deuxième cas : *La courbe* (u, x) *a un point singulier à l'origine.* — Comme il y a un terme en u^k, ce point est d'ordre $\leqslant k \leqslant n$. On recommencera sur ce point singulier l'analyse faite pour la courbe (x, y), et ainsi de suite.

Si la courbe est algébrique, la discussion doit aboutir comme dans le cas d'un point double.

359. Autres points singuliers. — La théorie précédente suppose la continuité et la dérivabilité des fonctions. Il peut exister d'autres singularités tenant à des discontinuités. Voici quelques exemples :

1°) *Point d'arrêt.* Si la fonction uniforme $f(x)$ cesse brusquement d'exister ou devient imaginaire (sans passer par l'infini) quand x passe par la valeur a, la courbe $y = f(x)$ a un point d'arrêt pour $x = a$. Par exemple, l'origine est un point d'arrêt de la courbe $y = x \operatorname{Log} x$.

2° *Point anguleux.* Ce sont ceux où deux arcs de courbe s'arrêtent sous une inclinaison différente. Par exemple, la courbe

$$y = x\,(x \operatorname{Log} x \pm (\sqrt{1-x})$$

a un *point saillant* ou *anguleux* à l'origine.

§ 2. Asymptotes des courbes planes.

360. Définition. — On appelle *asymptote* d'une branche infinie de

courbe une droite AB telle que la distance à cette droite d'un point M qui s'éloigne indéfiniment sur la courbe ait pour limite zéro.

Pour que cette condition soit réalisée, il est nécessaire et suffisant que la distance du point M à la droite AB ait pour limite zéro, quand on la compte parallèlement à une droite fixe oblique à AB, car la distance vraie et la distance oblique sont dans un rapport constant différent de zéro.

361. Asymptotes parallèles à l'axe des y. — Elles s'obtiennent directement en faisant usage du théorème suivant :

Pour qu'une droite, $x = a$, soit une asymptote de la courbe $y = f(x)$ en coordonnées rectangulaires ou obliques, il faut et il suffit que la valeur absolue de $f(x)$ croisse à l'infini quand x tend vers a dans un sens déterminé.

En effet, dans ces conditions, le point $M(x, y)$ de la courbe s'éloigne à l'infini et sa distance à la droite $x = a$ comptée parallèlement à l'axe des x, distance égale (au signe près) à $x - a$, tend vers zéro.

Si la courbe a pour équation $f(x, y) = 0$, on trouve les asymptotes parallèles à l'axe des y en cherchant pour quelles valeurs finies de x une ou plusieurs déterminations de y tendent vers l'infini.

Par exemple, l'axe des y est une asymptote de la courbe.

$$y = e^{\frac{1}{x}},$$

car y tend vers l'infini quand x positif tend vers 0 : la branche de courbe est à droite de l'asymptote.

On suit une méthode analogue pour trouver les asymptotes parallèles de l'axe des x. Ainsi la courbe précédente a une seconde asymptote $y = 1$, car x tend vers l'infini quand y tend vers 1.

362. Asymptotes non parallèles à l'axe des y. — Pour les trouver, on se sert du théorème suivant :

Si une branche infinie de courbe possède une asymptote $y = cx + d$, les coefficients c et d sont donnés par les relations

$$(1) \qquad c = \lim \frac{y}{x}, \qquad d = \lim (y - cx),$$

où x tend vers l'infini, le point M (x, y) restant sur la branche de courbe.

En effet, la distance du point M (x, y) à la droite $y - cx - d = 0$ est proportionnelle à l'expression $y - cx - d$. Pour que cette droite soit une asymptote, il faut donc que $y - cx - d$ ait pour limite 0

quand M s'éloigne à l'infini sur la branche correspondante ; et alors x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le sens dans lequel cette branche est infinie. Cela revient à dire que l'équation de la branche de courbe peut se mettre sous la forme

$$y - cx - d = u,$$

où u est une fonction de x qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini dans le sens indiqué. On déduit de cette relation

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = c + \frac{d+u}{x}, \qquad y - cx = d + u\,;$$

et en faisant tendre x vers l'infini dans le sens de la branche infinie, on obtient les deux formules du théorème.

Réciproquement, si les limites (1) *existent quand le point* M (x, y) *s'éloigne à l'infini sur une branche de la courbe, la droite $y = cx + d$ sera une asymptote de cette branche.*

En effet, si les limites (1) existent, $y - cx - d$ tend vers 0 quand M (x, y) s'éloigne à l'infini sur la branche, et $y - cx - d = 0$ est une asymptote.

Il est bon d'observer que x tend vers $+\infty$ sur une branche située à droite de l'axe des y, vers $-\infty$ sur une branche située à gauche. D'autre part, u est positif ou négatif selon que la branche est située au-dessus ou au-dessous de son asymptote.

363. Asymptotes des courbes algébriques. — Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique de degré n. En rangeant les termes par degrés décroissants, on la met sous la forme

$$(1) \qquad \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots = 0,$$

les polynomes φ étant homogènes de degrés $n, n-1, \ldots$

Pour trouver les asymptotes non parallèles à l'axe des y [1], posons $y = tx$; l'équation divisée par x^n donne la relation

$$(2) \qquad \varphi_n(1, t) + \frac{1}{x}\varphi_{n-1}(1, t) + \cdots = 0.$$

Le coefficient angulaire c d'une asymptote est la limite de t quand x croît indéfiniment sur une branche ; mais, l'équation précédente se

[1] Il n'y a qu'à intervertir les variables pour trouver, par le même procédé, les asymptotes non parallèles à l'axe des x.

réduisant à $\lim \varphi_n(1, t) = 0$, t tend alors vers une racine de l'équation

$$(3) \qquad \varphi_n(1, c) = 0.$$

Pour qu'il y ait des asymptotes non parallèles à l'axe des y, il faut donc que cette équation ait des racines réelles. Les directions fournies par ces racines sont les directions asymptotiques. L'équation (**3**) est l'*équation aux directions asymptotiques.*

Soit c une de ses racines. Posons $y = cx + v$ dans l'équation (**1**) ; puis, après avoir effectué les réductions, divisons par la plus haute puissance de x ; le résultat sera de la forme

$$(4) \qquad \psi(v, c) + \frac{1}{x}\psi_1(v, c) + \cdots = 0.$$

L'ordonnée d à l'origine d'une asymptote est la limite de v quand x tend vers l'infini ; c'est donc une racine de l'équation

$$(5) \qquad \psi(d, c) = 0.$$

Pour qu'il existe une asymptote de direction c, il faut donc que $\psi(d, c)$ contienne d et que l'équation $\psi(d, c) = 0$ ait au moins une racine réelle. Soit d l'une d'elles ; la droite

$$y = cx + d$$

sera une asymptote, *pourvu qu'il lui corresponde une branche infinie (réelle) de la courbe*, ayant donc une équation de la forme

$$(6) \qquad y = cx + d + u,$$

où u tend vers zéro quand x est infini d'un signe déterminé. Ce signe correspond au sens dans lequel la droite est asymptote, tandis que le signe de u fait connaître si la branche de courbe est au-dessus ou au-dessous de son asymptote.

Pour nous assurer de l'existence de cette branche, portons la valeur (**6**) de y dans l'équation de la courbe, ce qui revient à remplacer v par $d + u$ dans l'équation (**4**). L'équation

$$\psi(d + u, c) + \frac{1}{x}\psi_1(d + u, c) + \cdots = 0$$

devra fournir au moins une valeur infiniment petite de u pour x infini de signe déterminé. Remplaçons encore x par $1 : x'$; l'équation

$$(7) \qquad \psi(d + u, c) + x'\psi_1(d + u, c) + \cdots = 0.$$

devra fournir une valeur infiniment petite de u pour une valeur infiniment petite et de signe déterminé de x'. On est donc ramené à reconnaître si la courbe (7) possède une ou plusieurs branches passant par l'origine et quelle est leur disposition. C'est la question étudiée dans le paragraphe précédent.

De la nature de la courbe (7) à l'origine, on déduit, sans difficulté, la situation des branches de la courbe (1) qui ont pour asymptote la droite $y = cx + d$. En effet, à toute branche de (7) correspond une branche infinie de (1) et les signes de u et x se correspondent comme ceux de u et x'.

En particulier, si d est une racine simple de l'équation (5), la droite $y = cx + d$ est asymptote et cela dans les deux sens. En effet, $u = 0$ étant racine simple de $\psi_1(d + u, c)$, l'origine est un point ordinaire pour la courbe (7) dont l'équation renferme un terme du 1[er] degré en u. Donc la fonction u existe et est infiniment petite avec x' (positif ou négatif).

Exercices.

1. Asymptote du *Folium de Descartes* : $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Equation aux directions asymptotiques, $1 + c^3 = 0$; une seule direction réelle $c = -1$. Substituant $y = -x + v$, il vient

$$v + a - \frac{v(v+a)}{x} + \frac{v^3}{3x^3} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad d + a = 0.$$

Il y a une racine *simple* $d = -a$, donc une asymptote (dans les deux sens) $y = -x - a$. Pour reconnaître la position des deux branches correspondantes, remplaçons v par $-a + u$ et x par $1 : x'$; il vient

$$u[1 - x'(u-a)] + \frac{1}{3}x'^2(u-a)^3 = 0.$$

La valeur principale de u est $\frac{1}{3}a^3x'^2$ qui a le signe de a. Si a est positif, les deux branches infinies sont au-dessus de l'asymptote.

2. Asymptotes de la courbe $x^4 - y^4 + xy = 0$.

Equation aux directions asymptotiques, $1 - c^4 = 0$; deux directions réelles $c = \pm 1$. Substituant $y - cx + v$ il vient

$$4cv - \frac{c - 6v^2}{x} + \cdots = 0, \qquad \text{d'où} \qquad 4cd = 0.$$

Il y a, pour chaque c, une racine simple $d = 0$; donc, en tout, deux asymptotes (dans les deux sens) $y = \pm x$.

Pour reconnaître la position des branches infinies, remplaçons v par u et x par $1 : x'$; il vient

$$4cu - x'(c - bu^2) + \cdots = 0.$$

La valeur principale de u est $\frac{1}{4}x'$ et change de signe avec x' ; les branches relatives à une même asymptote sont au-dessus d'elle du côté des x positifs et au-dessous du côté des x négatifs.

3. Asymptotes de la courbe $y^2x^2 - ax + a^2 = 0$.

Equation aux directions asymptotiques, $c^2 = 0$; une seule direction réelle $c = 0$. Substituant $y = cx + v = v$, il vient

$$v^2 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad d^2 = 0.$$

Donc une asymptote possible $y = 0$. Assurons-nous de l'existence des branches correspondantes. Substituons $v = d + u = u$ et $x = 1 : x'$; il vient

$$u^2 - ax' + a^2x'^2 = 0.$$

L'origine est un point simple de cette courbe ; u a pour valeur principale $\pm\sqrt{ax'}$ pourvu que x' ait le signe de a. Donc, si $a > 0$, la droite $y = 0$ est asymptote du côté des x positifs seulement, mais il y a deux branches infinies situées de part et d'autre de cette droite. L'axe des y est aussi une asymptote.

4. Asymptote de la courbe $y^2x^2 - 2y + a^2 = 0$.

Une direction asymptotique $c = 0$, d'où $d = 0$. Mais $y = 0$ n'est pas une asymptote, parce que l'équation entre u et x' est

$$u^2 + a^2x'^2 - 2ux'^2 = 0$$

et l'origine est un point isolé de cette courbe. On montre d'une manière analogue qu'il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe des y.

Il est facile de traiter directement ces deux dernières courbes en résolvant leurs équations par rapport à x ou à y.

§ 3. Théorie du contact. Courbes et surfaces osculatrices.

364. Distance à une courbe plane d'un point infiniment voisin. — Considérons une courbe plane (C), définie en axes rectangulaires ou obliques par l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad f(x, y) = 0$$

où f est une fonction uniforme, continue ainsi que ses dérivées premières. Soient a, b les coordonnées d'un point ordinaire P de cette courbe ; ensuite x', y' les cordonnées d'un point Q infiniment voisin de P, mais non situé sur la courbe. Proposons-nous de déterminer la distance du point Q à la courbe (C). A cet effet, soient X et Y les coordonnées d'un point Q' de la courbe infiniment voisin de Q, ρ la distance QQ' et u, v ses coefficients directeurs ; on a

$$X = x' + u\rho, \qquad Y = y' + v\rho.$$

Portant ces valeurs dans l'équation de la courbe et développant suivant les puissances de ρ, il vient

$$0 = f(X, Y) = f(x', y') + \rho\left(u\frac{\partial F}{\partial x'} + v\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \cdots$$

Mais, comme x', y' sont infiniment voisins de a, b, cette relation peut se mettre sous la forme

$$f(x', y') + \rho\left(u\frac{\partial f}{\partial a} + v\frac{\partial f}{\partial b} + \varepsilon\right) = 0,$$

où ε tend vers 0 avec ρ.

Le point P est, par hypothèse, un point ordinaire, donc f'_a et f'_b ne sont pas nuls tous deux et $uf'_a + vf'_b$ ne s'annule que pour la direction u, v de la tangente à (C) au point P. Donc, si la direction QQ' n'a pas pour limite celle de cette tangente, la valeur principale de ρ est égale à la valeur absolue du quotient $f(x', y') : (uf'_a + vf'_b)$.

La plus courte distance du point P à la courbe (C) s'obtient en prenant la direction u, v qui rend le dénominateur maximum, c'est-à-dire celle de la normale à la courbe au point P.

De là, la conclusion suivante :

Théorème. — *Soient x', y' les coordonnées d'un point* Q, *infiniment voisin d'un point ordinaire* P *d'une courbe plane $f(x, y) = 0$; la distance du point* Q *à la courbe est un infiniment petit du même ordre que l'expression $f(x', y')$ obtenue en portant les coordonnées du point* Q *dans le premier membre de l'équation de la courbe. — Cette proposition subsiste si l'on compte la distance parallèlement à une direction fixe, pourvu seulement que ce ne soit pas celle de la tangente à la courbe au point* P.

365. Distance à une surface d'un point infiniment voisin. — Pour

déterminer, en axes rectangulaires ou obliques, la distance à une surface,

$$F(x, y, z) = 0,$$

d'un point Q qui est infiniment voisin d'un point ordinaire P (a, b, c) de la surface, nous procéderons comme dans le n° précédent. Nous supposons la fonction F continue ainsi que ses dérivées premières.

Soient x', y', z' les coordonnées du point Q ; X, Y, Z celles d'un point Q′ de la surface infiniment voisin de Q. Désignons par ρ la distance QQ′ et par u, v, w ses coefficients directeurs ; nous aurons, ε tendant vers 0 avec ρ,

$$F(X, Y, Z) = F(x', y', z') + \rho(uF'_a + vF'_b + wF'_c + \varepsilon) = 0.$$

Mais, P étant un point ordinaire, $uF'_a + vF'_b + wF'_c$ ne s'annule que pour une direction parallèle au plan tangent à la surface au point P. Pour toute autre direction, la valeur principale de ρ est égale à la valeur absolue du quotient $F(x', y', z') : (uF'_a + vF'_b + wF'_c)$ et la plus courte distance du point (x', y', z') à la surface s'obtient en choisissant la direction qui rend le dénominateur maximum. Ce sera d'ailleurs celle de la normale à la surface au point P.

De là, le théorème suivant :

Théorème. — *La distance à la surface* $F(x, y, z) = 0$ *d'un point* Q, *infiniment voisin d'un point ordinaire* P *de cette surface, est un infiniment petit du même ordre que l'expression* $F(x', y', z')$ *obtenue en portant les coordonnées du point* Q *dans le premier membre de l'équation de la surface. — Cette proposition subsiste si l'on compte la distance parallèlement à une direction fixe, pourvu qu'elle ne soit pas parallèle au plan tangent à la surface au point* P.

366. Distance à une courbe gauche d'un point infiniment voisin. — Cherchons maintenant la distance à une courbe gauche :

$$(C) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0,$$

d'un point $Q(x', y', z')$ qui est infiniment voisin d'un point ordinaire P (a, b, c) de la courbe (*t.* I, n° 316). Soient Q′(X, Y, Z) un point de la courbe infiniment voisin de Q, ρ la distance Q′Q et u, v, w ses coefficients directeurs ; nous trouverons, comme ci-dessus, ε et ε_1 étant infiniment petits,

$$f(x', y', z') + \rho(uf'_a + vf'_b + wf'_c + \varepsilon) = 0,$$
$$f_1(x', y', z') + \rho(uf'_{1a} + vf'_{1b} + wf'_{1c} + \varepsilon_1) = 0.$$

Donc ρ s'exprime par les deux fractions :

$$\rho = -\frac{f(x', y', z')}{uf'_a + vf'_b + wf'_c + \varepsilon} = -\frac{f_1(x', y', z')}{uf'_{1a} + vf'_{1b} + wf'_{1c} + \varepsilon_1}.$$

Si QQ′ n'est pas parallèle à la tangente à la courbe au point P, l'un au moins des deux dénominateurs n'est pas infiniment petit. Donc ρ est du même ordre que l'un au moins des deux numérateurs, mais peut être infiniment grand par rapport à l'autre ; il est donc du même ordre que le plus grand des deux en valeur absolue, et cela est vrai, en particulier, si ρ est la plus courte distance. D'où le théorème suivant :

Théorème. — *La plus courte distance à une courbe gauche* (C) *d'un point* (x', y', z') *infiniment voisin d'un point ordinaire de cette courbe, est un infiniment petit du même ordre que la plus grande en valeur absolue des deux quantités :* $f(x', y', z')$, $f_1(x', y', z')$.

367. Définition générale du contact. — Lorsque deux courbes (C) et (C′) ou bien une courbe (C) et une surface S ont en commun un point ordinaire P, on dit qu'elles ont entre elles un contact d'ordre n en ce point (n entier), si, prenant sur (C) un point Q infiniment voisin de P, sa distance à (C′) (ou à S) est un infiniment petit d'ordre $n + 1$ par rapport à PQ.

Dans le cas de deux courbes, le point Q peut être pris indifféremment sur l'une ou sur l'autre, car nous allons voir que les conditions du contact sont symétriques par rapport aux deux courbes.

368. Contact de deux courbes planes. — Supposons la courbe (C′) définie par l'équation

$$(C') \qquad\qquad F(x, y) = 0,$$

où F est une fonction uniforme, continue et indéfiniment dérivable.

Soit P un point ordinaire commun à cette courbe et à la courbe (C). En vertu du théorème du nº 364, *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux courbes aient au point* P *un contact de l'ordre n est que la quantité* $F(x, y)$, *obtenue en portant dans* F *les coordonnées d'un point* Q *de* (C) *infiniment voisin du point* P, *soit un infiniment petit d'ordre* $n + 1$ *par rapport à* PQ.

Appliquons ce principe dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur la représentation analytique de la courbe (C).

Supposons d'abord (C) définie par une représentation paramétrique :

$$(C) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

où φ, ψ sont des fonctions uniformes, indéfiniment dérivables, auquel cas un point ordinaire est un point où l'une au moins des deux dérivées x', y' par rapport à t est différente de 0.

Soit t_0 le paramètre du point P ; un point Q de (C) infiniment voisin de P aura pour coordonnées.

$$x = \varphi(t_0 + dt), \qquad y = \psi(t_0 + dt)$$

et PQ sera du même ordre que ds, qui est lui-même du même ordre que dt, car x' ou y' n'est pas nul.

La condition du contact d'ordre n est donc que l'expression

$$F[\varphi(t_0 + dt), \psi(t_0 + dt)]$$

soit d'ordre $n + 1$ par rapport à dt.

Posons, pour abréger,

$$\Phi(t) = F[\varphi(t), \psi(t)],$$

on voit que le développement de $\Phi(t_0 + dt)$ par la formule de Taylor devra commencer par un terme en dt^{n+1}. *Les conditions analytiques d'un contact de l'ordre n au moins en un point t_0 sont donc en nombre $n + 1$, à savoir*

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \dots = \Phi^n(t_0) = 0.$$

Mais pour que le contact soit de l'ordre n et non d'ordre plus élevé, il faut ajouter à ces conditions que $\Phi^{n+1}(t_0)$ ne soit pas nul.

La condition prend une forme particulièrement simple, lorsque les équations des deux courbes sont résolues par rapport à l'ordonnée, donc de la forme

$$(C) \qquad y - f(x) = 0, \qquad\qquad (C') \qquad y - f_1(x) = 0,$$

ce qui suppose que la tangente ne soit pas parallèle à l'axe des y.

Si x_0 est l'abscisse du point de contact P, les coordonnées d'un point Q infiniment voisin et situé sur (C) sont $x_0 + dx$, $f(x_0 + dx)$. En les portant dans le premier membre de (C') et en observant que PQ est de l'ordre de dx, on voit que la condition du contact d'ordre n au point x_0 est que la différence

$$f(x_0 + dx) - f_1(x_0 + dx)$$

soit d'ordre $n+1$ par rapport à dx. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$f(x_0) = f_1(x_0), \qquad f'(x_0) = f_1'(x_0), \ldots f^n(x_0) = f_1^n(x_0),$$

tandis que $f^{n+1}(x_0)$ et $f_1^{n+1}(x_0)$ soient différents.

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que deux courbes planes aient un contact de l'ordre n en un point où la tangente n'est pas parallèle à l'axe des y, il faut et il suffit que l'ordonnée et ses n premières dérivées par rapport à l'abscisse aient les mêmes valeurs pour les deux courbes. Pour que le contact ne soit pas d'ordre plus élevé, il faut encore que les dérivées de l'ordre $n+1$ diffèrent pour les deux courbes.*

On remarquera, d'après cela, que deux courbes qui ont un contact du premier ordre ou d'ordre supérieur, sont *tangentes* au point de contact, car, y' ayant même valeur pour les deux courbes, elles ont même tangente.

THÉORÈME. — *Deux courbes qui ont un contact de l'ordre n se coupent ou ne se coupent pas au point de contact suivant que n est pair ou impair.*

En effet, soient $y = f(x)$ et $y = f_1(x)$ les équations des deux courbes et x_0 l'abscisse du point de contact. Nous venons de voir que, dans le voisinage de ce point, la différence des ordonnées des deux courbes, à savoir $f(x_0 + dx) - f_1(x_0 + dx)$ est d'ordre $n+1$ par rapport à dx. Cette différence change de signe avec dx si n est pair, et ne change pas si n est impair. Dans le premier cas, les courbes se coupent au point x_0 et elles ne se coupent pas dans le cas contraire.

369. Courbes planes osculatrices. — Supposons que l'on donne la courbe (C) et le point P sur cette courbe, mais que la courbe (C′) soit seulement assujettie à faire partie d'une famille de courbes définie par une équation

$$(\mathrm{C}') \qquad \mathrm{F}(x, y, a_1, a_2, \ldots a_{n+1}) = 0,$$

renfermant $n+1$ paramètres indéterminés.

On peut se proposer de déterminer ces paramètres de manière que la courbe (C′) ait au point P avec la courbe (C) un contact de l'ordre

le plus élevé possible. La courbe (C′) est alors, parmi toutes celles du système considéré, l'*osculatrice* de la courbe (C).

En général, $n+1$ paramètres distincts peuvent être assujettis à $n+1$ conditions. On peut donc les déterminer de manière à obtenir au point P un contact de l'ordre n au moins.

Pour fixer les idées, supposons que la courbe (C) soit donnée par une représentation paramétrique :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

et posons, comme au n° précédent,

$$\Phi(t) = F(\varphi, \psi, a_1, a_2, \ldots a_{n+1}).$$

Les $n+1$ conditions du contact d'ordre n au point t seront

$$\Phi(t) = \Phi'(t) = \Phi''(t) = \cdots \Phi^n(t) = 0.$$

En général, dans les applications, ce système de $n+1$ équations entre les $n+1$ indéterminées a n'est ni incompatible ni indéterminé et il détermine les éléments de l'osculatrice. L'osculatrice a un contact de l'ordre n si $\Phi^{n+1}(t)$ ne s'annule pas et exceptionnellement un contact d'ordre plus élevé si cette dérivée s'annule aussi.

Supposons, comme cela arrive dans la plupart des applications, que les $n+1$ paramètres a soient complètement déterminés, soit par les équations $\Phi = \Phi' = \cdots = \Phi^n = 0$, soit par la condition de faire passer la courbe par $n+1$ points donnés. On aura le théorème suivant :

Théorème. — *La courbe* (C′) *dépendant de* $n+1$ *paramètres qui est osculatrice à une courbe donnée* (C) *en un point également donné* P, *est la limite des courbes de son espèce qui passent par le point* P *et par* n *autres points de la courbe* (C) *infiniment voisins du premier.*

Démonstration. — Les courbes (C) et (C′) restant définies comme ci-dessus, désignons par t_0 t_1, $t_2, \ldots$ t_n les paramètres du point P et de n points voisins sur la courbe (C). La condition que (C′) passe par ces points fournit les $n+1$ équations

$$\Phi(t_0) = \Phi(t_1) = \cdots = \Phi(t_n) = 0,$$

Donc, en vertu du théorème de Rolle, dans les intervalles de ces $n+1$ racines de $\Phi(t)$, se trouvent au moins n racines de $\Phi'(t)$ et, par suite, $n-1$ de $\Phi''(t), \ldots$ et une de $\Phi^n(t)$. Si l'on fait tendre $t_1, t_2, \ldots t_n$ vers t_0, toutes ces racines tendent aussi vers t_0. On retrouve donc, à la limite, le système d'équations,

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \cdots = \Phi^n(t_0) = 0,$$

qui détermine l'osculatrice au point t_0.

370. Exemples. — I. *Droite osculatrice.* L'équation d'une droite,

$$y - ax - b = 0,$$

renferme deux paramètres arbitraires a et b permettant d'établir en un point donné avec une courbe $y = f(x)$ un contact du premier ordre. Les éléments de la droite osculatrice au point x seront définis par les équations :

$$\Phi(x) = f(x) - ax - b = 0, \qquad \Phi'(x) = f'(x) - a = 0.$$

Son coefficient angulaire a est donc $f'(x)$. *La droite osculatrice est la tangente,* conformément au théorème précédent.

La tangente a donc généralement un contact du premier ordre avec la courbe et la courbe ne traverse pas sa tangente. Exceptionnellement, le contact sera d'ordre plus élevé si l'on a $\Phi''(x) = f''(x) = 0$, ce qui arrive en un point d'inflexion. Donc, *en un point d'inflexion, le contact de la tangente avec la courbe est au moins du second ordre.*

II. *Cercle osculateur.* — L'équation d'un cercle,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

renferme trois paramètres, qui permettent d'établir avec une courbe, en un point donné P, un contact du deuxième ordre. Ces trois paramètres permettent aussi de faire passer le cercle par trois points. Le cercle osculateur au point P est donc la limite d'un cercle passant par ce point et deux autres points infiniment voisins (Propriété prise comme définition dans le premier volume). Le contact du cercle osculateur avec la courbe est donc généralement du second ordre ; et le cercle traverse la courbe, sauf aux points exceptionnels où l'ordre du contact est plus élevé.

371. Contact d'une courbe et d'une surface. — Soit S une surface définie par l'équation

$$\text{(S)} \qquad F(x, y, z) = 0,$$

où F est une fonction uniforme indéfiniment dérivable, ensuite P un point ordinaire commun à cette surface et à une courbe (C). D'après la définition du contact (nº 367) et en vertu du théorème du nº 365, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Pour qu'une courbe* (C) *et une surface* (S) *aient, en un point ordinaire* P, *un contact d'ordre* n, *il faut et il suffit que l'expression* F (x, y, z) *obtenue en substituant dans le premier membre de l'équa-*

tion de la surface les coordonnées x, y, z d'un point Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe* (C), *soit un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à* PQ.

Si la courbe (C) est donnée par une représentation paramétrique :

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

où les fonctions f sont uniformes et indéfiniment dérivables, comme les dérivées x', y', z' ne s'annulent pas toutes en un point ordinaire, on montre par un raisonnement semblable à celui du nº 368 que la condition d'un contact de l'ordre n en point ordinaire $P(t_0)$ sera la suivante : *Si l'on pose $\Phi(t) = F(x, y, z)$, où x, y, z sont fonctions de t, il faut et il suffit que $\Phi(t_0 + dt)$ soit d'ordre $n+1$ par rapport à dt, ou que l'on ait*

$$\Phi(t_0) = \Phi'(t_0) = \cdots = \Phi^n(t_0) = 0, \qquad \Phi^{n+1}(t_0) \gtrless 0.$$

Il faut donc $n+1$ conditions pour qu'une courbe et une surface aient, en un point donné, un contact de l'ordre n au moins.

Supposons que l'équation de la surface soit de la forme

$$z - f(x, y) = 0,$$

et celles de la courbe de la forme

$$y = f_1(x), \qquad z = f_2(x).$$

Prenant $t = x$, on a, dans ce cas-ci,

$$\Phi(x) = f_2(x) - f[x, f_1(x)]$$

et la condition du contact d'ordre n au point x_0 est que l'expression

$$f_2(x_0 + dx) - f[x_0 + dx,\ f_1(x_0 + dx)]$$

soit d'ordre $n+1$ par rapport à dx. Cette expression représente la différence des ordonnées z de la courbe et de la surface. On a donc, comme dans le cas des courbes planes, le théorème suivant :

Théorème. — *La courbe* (C) *qui a, avec une surface* (S), *un contact d'ordre n en un point, traverse ou ne traverse pas* (S) *selon que n est pair ou impair.*

372. Surfaces osculatrices en un point d'une courbe. — Considérons une famille de surfaces à $n+1$ paramètres

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \ldots a_{n+1}) = 0.$$

On appelle *osculatrice*, en un point P d'une courbe donnée (C), celle des surfaces de la famille précédente qui a, avec la courbe, un

contact de l'ordre le plus élevé possible. Comme il faut généralement $n+1$ conditions pour un contact de l'ordre n, elles déterminent les paramètres $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$; l'osculatrice, dans une famille de surfaces à $n+1$ paramètres, a donc généralement un contact d'ordre n avec la courbe.

Supposons que les $n+1$ paramètres soient déterminés aussi bien par la condition du contact d'ordre n que par celle de passer par $n+1$ points ; on aura, comme au n° 369, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La surface dépendant de $n+1$ paramètres qui est osculatrice en un point donné P d'une courbe* (C), *est la limite des surfaces de son espèce passant par le point* P *et n autres points de la courbe infiniment voisins du premier.*

373. Plan osculateur. — L'équation d'un plan

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$$

renferme trois paramètres arbitraires, qui permettent d'établir, en un point t d'une courbe (C) ayant pour équations

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

un contact du second ordre. Les conditions de ce contact sont

$$\begin{cases} \Phi(t) = ax + by + cz + d = 0, \\ \Phi'(t) = ax' + by' + cz' = 0, \\ \Phi''(t) = ax'' + by'' + cz'' = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent les paramètres du plan osculateur au point t, pourvu que l'un au moins des déterminants

$$A = y'z'' - y''z', \qquad B = z'x'' - z''x', \qquad C = x'y'' - x''y'$$

ne soit pas nul. Nous supposerons cette condition réalisée.

Le plan osculateur a généralement un contact du second ordre et, par conséquent, la courbe traverse son plan osculateur. Pour que cet ordre soit plus élevé, il faut que l'on ait

$$\Phi'''(t) = ax''' + by''' + cz''' = 0,$$

auquel cas on peut éliminer a, b, c entre $\Phi' = \Phi'' = \Phi''' = 0$ et l'on obtient la condition $D = 0$, où D est le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Le plan osculateur en un point où D s'annule est dit *stationnaire*, il a avec la courbe un contact du troisième ordre au moins, et géné-

ralement la courbe ne le traverse pas. Au point de contact, la torsion est nulle, en vertu de la formule (*t.* I, n° 282)

$$\frac{1}{T} = -\frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Le plan osculateur, étant déterminé par la condition d'avoir avec la courbe un contact du second ordre, l'est aussi par celle de passer par le point t et deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier, propriété prise comme définition dans le premier volume.

Théorème. — *Une courbe dont tous les plans osculateurs sont stationnaires est plane.*

En effet, le déterminant D est un wronskien $W(x', y', z')$, dont l'annulation exprime que x', y', z' sont liés par une relation linéaire à coefficients constants (n° 203) :

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

ce qui est l'équation d'un plan.

Remarque. En vertu de ce théorème, toute courbe dont la torsion est constamment nulle est plane, car, dans ce cas, on a $D = 0$ d'après l'expression de $1 : T$. Ce résultat a été établi autrement dans le premier volume.

374. Contact de deux courbes de l'espace. — Soit (C′) une courbe définie par les deux équations

$$(C') \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0,$$

où les fonctions F sont uniformes, continues et indéfiniment dérivables, ensuite P un point ordinaire commun à cette courbe et à une courbe (C). D'après la définition du contact, et en vertu du théorème du n° 366, la condition d'un contact de l'ordre n au point P est donnée par le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que deux courbes* (C) *et* (C′) *aient en un point ordinaire* P *un contact d'ordre n, il faut et il suffit que les deux expressions* $F(x, y, z)$ *et* $F_1(x, y, z)$, *obtenues en substituant dans les premiers membres des équations de* (C′) *les coordonnées d'un point* Q *infiniment voisin de* P *sur la courbe* (C), *soient infiniment petites de l'ordre $n + 1$ par rapport à la distance* PQ, *l'une des deux expressions au moins n'étant pas d'ordre plus élevé.*

Supposons la courbe (C) définie par une représentation paramétrique

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

les fonctions f étant continues et indéfiniment dérivables, et posons, x, y, z étant ces fonctions de t,

$$\Phi(t) = F(x, y, z), \qquad \Phi_1(t) = F_1(x, y, z).$$

Les conditions d'un contact d'ordre n au point t sont que $\Phi(t + dt)$ et $\Phi_1(t + dt)$ soient de l'ordre $n + 1$ par rapport à dt, l'une des expressions seulement pouvant être d'ordre plus élevé. On aura donc

$$\Phi(t) = \Phi'(t) = \Phi''(t) = \dots \Phi^n(t) = 0,$$
$$\Phi_1(t) = \Phi_1'(t) = \Phi_1''(t) = \dots \Phi_1^n(t) = 0\,;$$

de plus, une des deux dérivées $\Phi^{n+1}(t)$, $\Phi_1^{n+1}(t)$ ne sera pas nulle, sinon le contact serait d'ordre plus élevé.

Il faut donc $2n + 2$ relations pour exprimer que deux courbes de l'espace ont, en un point donné, un contact d'ordre n au moins.

375. Courbes osculatrices dans l'espace. — Les courbes osculatrices se définissent dans l'espace comme dans le plan avec une différence toutefois. Si un système de courbes (C′) dépend de $2n + 2$ paramètres, ceux-ci peuvent généralement se déterminer par la condition d'établir avec une courbe donnée (C), en un point donné P, un contact de l'ordre n. Mais, si les équations des courbes (C′) ne renferment que $2n + 1$ paramètres, on ne peut plus établir qu'un contact d'ordre $n - 1$, n'imposant que $2n$ conditions, et il reste un paramètre arbitraire. Il y aura donc une infinité d'osculatrices de l'espèce (C′), ou il n'y en aura pas, comme on voudra l'entendre.

Considérons une famille de courbes (C′) à $2n + 2$ paramètres, et admettons que ces paramètres se déterminent complètement, soit par la condition d'établir en un point donné avec une courbe donnée (C) un contact de l'ordre n, soit par celle de faire passer la courbe (C′) par $n + 1$ points donnés. On démontrera, comme au nº 369, le théorème suivant :

Théorème. — *La courbe* (C′) *osculatrice en un point* P *de la courbe* (C), *est la limite des courbes* (C′) *qui passent par le point* P *et par n autres points de la courbe* (C) *infiniment voisins du premier.*

376. Exemples. — I. *Droite osculatrice.* Les équations d'une droite

de l'espace renferment quatre paramètres, permettant d'établir un contact du premier ordre avec une courbe (C) en un point donné P. Suivant le théorème précédent, cette droite est la limite d'une sécante passant par P et un point de (C) infiniment voisin. La droite osculatrice se confond avec la tangente et a généralement avec la courbe un contact du premier ordre.

II. *Cercle osculateur.* — Les équations d'un cercle dans l'espace dépendent de 6 paramètres, permettant d'établir un contact du second ordre ou de faire passer le cercle par trois points. Le *cercle osculateur* en un point P d'une courbe gauche est donc la limite du cercle passant par ce point et deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier, il a généralement avec la courbe un contact du second ordre.

§ 4. Enveloppes des courbes planes.

377. Points-caractéristiques. — Soit une famille de courbes planes

$$F(x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

définie par une équation contenant un paramètre arbitraire α. Nous supposons que la fonction F et ses dérivées partielles premières sont des fonctions continues et uniformes. Nous admettons encore que, si l'une de ces courbes admet des points singuliers, ceux-ci sont isolés les uns des autres.

Considérons, en particulier, la courbe (α), c'est-à-dire celle qui correspond à la valeur α du paramètre et soit M un point *ordinaire* de cette courbe, tel donc que l'une des dérivées F'_x ou F'_y ne soit pas nulle. Cette condition reste réalisée dans le voisinage du point M, de sorte que, aux environs de ce point, les courbes de la famille sont dépourvues de point singulier.

L'équation de la courbe $(\alpha + d\alpha)$ infiniment voisine de la courbe (α) est de la forme

$$F(x, y, \alpha) + [F'_\alpha(x, y, \alpha) + \varepsilon]\, d\alpha = 0,$$

où ε tend vers 0 avec α. D'après un principe connu (n° 364), la distance du point $M(x, y)$ de la courbe (α) à celle-ci est un infiniment petit du même ordre que l'expression

$$[F'_\alpha(x, y, \alpha) + \varepsilon]\, d\alpha,$$

obtenue en substituant dans l'équation de celle-ci les coordonnées x, y

du point M. Cette expression est donc généralement de l'ordre de $d\alpha$. Pour qu'elle soit d'ordre plus élevé, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $F'_\alpha = 0$. *Les points-caractéristiques d'une courbe* (α) *sont les points ordinaires de cette courbe dont la distance à la courbe infiniment voisine est d'ordre supérieur à* $d\alpha$. Ce sont donc les points *ordinaires* qui satisfont aux deux équations

$$F = 0, \qquad F'_\alpha = 0.$$

Quand deux courbes infiniment voisines :

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad F(x, y, \alpha + d\alpha) = 0,$$

se coupent, *les points d'intersection limites sont des points-caractéristiques*, car leurs coordonnées satisfont à l'équation

$$\lim \frac{F(x, y, d\alpha) - F(x, y, \alpha)}{d\alpha} = F'_\alpha = 0.$$

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie, les points-caractéristiques ne sont pas toujours limites de points d'intersection [1].

378. Enveloppe. — Il peut arriver exceptionnellement qu'une courbe (α) se compose tout entière de points-caractéristiques; mais, en général, les points-caractéristiques sont isolés sur chaque courbe. *On appelle enveloppe de la famille le lieu géométrique des points-caractéristiques isolés.*

S'il existe une enveloppe, elle s'obtiendra donc en éliminant (α) entre les deux équations

$$(2) \qquad F = 0, \qquad F'_\alpha = 0.$$

Mais on peut obtenir en même temps des courbes étrangères à l'enveloppe.

En effet, si l'on peut vérifier les équations (**2**) par une valeur de α indépendante de (x, y), la courbe (α) correspondante est exclusivement composée de points-caractéristiques et ne fait généralement pas partie de l'enveloppe.

En second lieu, les coordonnées des points singuliers satisfont aussi aux équations (**2**), car ce sont des fonctions de α qui vérifient les trois équations $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ et, par conséquent, l'équation $F'_\alpha = 0$ qu'on obtient en dérivant totalement la première par rapport à α en tenant compte des deux autres.

[1] Pour la discussion complète de cette question, voir notre article *Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre supérieur avec leurs enveloppées.* Memorie d. Pontif. Acc. Rom. dei Nuovi Lincei. Vol. XXVIII, 1910.

L'équation de l'enveloppe s'obtiendra donc en cherchant les valeurs de x, y fonctions de α, qui satisfont aux équations (**2**) sans être les coordonnées d'un point singulier. Ces valeurs

$$(3) \qquad x = x(\alpha), \qquad y = y(\alpha),$$

fournissent une représentation paramétrique de l'enveloppe.

Dans la théorie qui va suivre, nous n'étudierons qu'un arc d'enveloppe dépourvu de points singuliers. Une des dérivées $x'(\alpha)$, $y'(\alpha)$ sera donc supposée différente de zéro.

379. Théorèmes. — *Chaque enveloppée touche son enveloppe au point-caractéristique* M.

Les coordonnées des points de l'enveloppe sont des fonctions (**3**) de α qui vérifient l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$. Dérivons totalement par rapport à α ; il vient, en tout point de l'enveloppe, puisque $F'_\alpha = 0$,

$$x' F'_x + y' F'_y = 0.$$

Cette équation ne peut être identique, car, en un point ordinaire, une au moins des dérivées F'_x, F'_y n'est pas nulle. Les coefficients directeurs x', y' de la tangente à l'enveloppe sont donc déterminés par la même équation que ceux de la tangente à l'enveloppée au même point, et les deux tangentes se confondent.

Réciproquement, si l'on cherche une courbe (E) *à laquelle les enveloppées restent tangentes, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, (E) étant le lieu des points de contact des enveloppées, les coordonnées des points de (E) sont des fonctions du paramètre α satisfaisant à l'équation $F(x, y, \alpha) = 0$. Celle-ci, dérivée totalement, donne

$$x' F'_x + y' F'_y + F'_\alpha = 0, \qquad \text{d'où} \qquad F'_\alpha = 0,$$

car on a $x'F'_x + y'F'_y = 0$ (les tangentes à l'enveloppée et à la courbe (E) étant les mêmes). Donc (E) est un lieu de points-caractéristiques. Il suit évidemment de là que *toute courbe plane est l'enveloppe de ses tangentes* [1]

[1] Il est intéressant de vérifier cette proposition directement. Soit $\beta = f(\alpha)$ l'équation de la courbe, donc

$$y - f(\alpha) = (x - \alpha) f'(\alpha)$$

celle de sa tangente au point α. Les coordonnées d'un point-caractéristique satisfont à l'équation dérivée en α

$$(x - \alpha) f''(\alpha) = 0.$$

Si $f''(\alpha)$ est nul (point d'inflexion), tous les points de la tangente sont caractéristiques. Mais, en général, ce n'est pas le cas ; la relation précédente donne $x = \alpha$ et le point de contact est seul caractéristique.

380. Calcul de l'enveloppe pour d'autres formes d'équations. — I. Il arrive souvent que l'on doive chercher l'enveloppe d'une courbe $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, dont l'équation renferme deux paramètres liés par la relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Considérant β comme une fonction de α définie par cette relation, on est ramené au cas précédent. On doit, pour obtenir l'enveloppe, éliminer α, β, et $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les quatre équations :

$$F = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0;$$

ou, ce qui revient au même, α et β entre les trois équations :

$$(4) \qquad F = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{d(F, \varphi)}{d(\alpha, \beta)} = 0,$$

dont la dernière provient de l'élimination de $d\beta : d\alpha$ entre les deux dernières équations du groupe précédent.

II. La courbe dont on cherche l'enveloppe peut aussi être donnée par une représentation paramétrique

$$(5) \qquad x = \varphi(t, \alpha), \qquad y = \psi(t, \alpha),$$

t désignant la variable indépendante sur la courbe. On revient encore au cas ordinaire en considérant, dans la première équation, t comme une fonction de y et de α définie par la seconde équation. Pour former l'équation de l'enveloppe, on est conduit à éliminer α, t et $\frac{\partial t}{\partial \alpha}$ entre les équations (5) et les deux suivantes :

$$(6) \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \qquad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

ou, ce qui revient au même, à éliminer t et α entre les équations (6) et l'équation unique

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{d(t, \alpha)} = 0,$$

provenant de l'élimination immédiate de la dérivée de t entre les équations (6).

EXERCICES.

1. Enveloppe de la famille à deux paramètres α et β

$$\frac{x^m}{\alpha^m} + \frac{y^m}{\beta^m} = 1 \qquad \text{avec la condition} \qquad \frac{\alpha^p}{a^p} + \frac{\beta^p}{b^p} = 1.$$

R. L'équation de l'enveloppe est

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m-p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m-p}} = 1.$$

Cas particuliers : 1° Si $m = 1$, $p = 2$, $b = a$, on trouve l'enveloppe d'une droite de longueur constante a dont les extrémités s'appuient sur deux axes rectangulaires. C'est l'*astroïde*, $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*t.* I, p, 302, ex. 3).

2° Si $m = 2$, $p = 1$, $b = a$, la courbe variable est une ellipse décrite par un des points de la droite précédente et son enveloppe est la même que celle de cette droite.

3° Si $m = 2, p = 2$, la courbe variable est une ellipse dont les sommets sont les projections des points d'une ellipse fixe sur ses axes. L'enveloppe est un système de quatre droites $\pm \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$.

2. *Enveloppe d'une droite.* — Les axes étant rectangulaires, on met l'équation d'une droite mobile sous la forme normale

$$(1) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha - f(\alpha) = 0.$$

Le point-caractéristique est à l'intersection de cette droite avec

$$(2) \qquad -x \sin\alpha + y \cos\alpha - f'(\alpha) = 0$$

et on obtient ses coordonnées x, y en fonction de α par la résolution du système. Montrer : 1° que la seconde équation est celle de la normale à l'enveloppe (E) de la droite (1) ; 2° que l'enveloppe de la droite (2) est la développée de (E) ; 3° que le rayon de courbure R et la différentielle ds de l'arc de (E) sont

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \pm [f(\alpha) + f''(\alpha)] \, d\alpha,$$

d'où la *formule de rectification de Legendre*

$$s = \pm [f'(\alpha) + \int f(\alpha) \, d\alpha].$$

3. *Enveloppe d'un cercle.* — Soit le cercle (a, b, R fonctions de α)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Les points-caractéristiques sont à l'intersection avec la droite

$$(D) \qquad (x - a) a' + (y - b) b' - RR' = 0,$$

Cette droite est perpendiculaire à la tangente MT à la courbe (C) décrite par le centre M du cercle, et sa distance au centre est égale à

$$\frac{RR'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} = R \frac{dR}{ds},$$

s étant l'arc de la courbe (C) :

1° Si $| dR | < | ds |$, la droite D coupe le cercle en deux points et il y a deux branches à l'enveloppe.

En particulier, si R est constant, la droite D passe par le centre et l'enveloppe se compose de deux branches obtenues en portant sur la normale à la courbe (C), de part et d'autre du point M, la longueur constante R.

2° Si $| dR | > | ds |$, la droite et le cercle ne se coupent pas et il n'y a pas d'enveloppe.

3° Si $| dR | = | ds |$, la droite D est tangente au cercle au point-caractéristique (donc aussi à l'enveloppe) et la normale à l'enveloppe est tangente à la courbe (C). Dans ce cas, *le cercle variable est osculateur à son enveloppe* : la condition nécessaire et suffisante pour cela est donc $| dR | = | ds |$.

4. *Caustiques.* — La caustique d'une courbe (C) pour un point lumineux A est l'enveloppe des rayons émanés de A et réfléchis sur (C). Montrer qu'elle est la développée de la podaire, par rapport au même point, de la courbe (C′) semblable à (C) obtenue en prolongeant d'une longueur égale chaque rayon vecteur AP mené du point A la courbe (C). En déduire la relation

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{r}=\frac{2}{R\cos i},$$

r étant le rayon incident AP, l le rayon réfléchi terminé au point où il touche son enveloppe, R le rayon de courbure de (C), i l'angle d'incidence. En particulier, si les rayons sont parallèles, $l=\frac{R\cos i}{2}$ et la normale à la caustique passe par le milieu du rayon de courbure de (C).

R. On montre que le rayon réfléchi est normal à la podaire de (C′) en observant que la normale à la podaire d'une courbe passe par le milieu du rayon vecteur de cette courbe. On applique alors la relation qui lie les rayons de courbure d'une courbe et de sa podaire (*t.* I, p. 304, ex. 8).

5. Montrer que la *caustique d'un cercle* par rapport à un point de la circonférence est une *cardioïde* (*t.* I, p. 284, ex. 6 et 7 et p. 303 ex. 4) ; celle par rapport à un point à l'infini (rayons parallèles) une *épicycloïde* à deux rebroussements.

§ 5. Enveloppes des surfaces et des courbes de l'espace.

381. Enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre. — La théorie est analogue à celle des enveloppes de courbes planes, ce qui nous permet d'abréger. Soit une famille de surfaces

$$(1) \qquad F(x, y, x, \alpha)=0.$$

où F est une fonction continue et dérivabte.

On appelle *caractéristique* de la surface (α) le lieu des *points-caractéristiques* de cette surface, c'est-à-dire le lieu des points *ordinaires* dont la distance à la surface infiniment voisine ($\alpha + d\alpha$) est d'ordre supérieur à $d\alpha$. En général, et nous supposerons qu'il en est ainsi, ce lieu est une ligne définie par les deux équations

$$(2) \qquad F = 0, \qquad F'_\alpha = 0.$$

Si la surface ($\alpha + d\alpha$) coupe la surface (α), la limite de la ligne d'intersection est une caractéristique ; mais il peut arriver, par exception, qu'une caractéristique ne soit pas une limite d'intersection.

L'enveloppe de la famille de surfaces est le lieu des caractéristiques et chaque surface de la famille prend le nom d'*enveloppée.*

On remarque, comme pour les courbes planes, que les coordonnées des *points singuliers* (où $F'_x = F'_y = F'_z = 0$) satisfont aussi aux équations (2) et l'on est conduit à la règle suivante :

L'équation de l'enveloppe d'une famille de surfaces $F = 0$ *s'obtient en éliminant le paramètre* α *entre l'équation* $F = 0$ *et sa dérivée (par rapport au paramètre)* $F'_\alpha = 0$. *Mais on obtiendra, en même temps, le lieu des points singuliers s'il y en a.*

Théorèmes. — *Chaque enveloppée touche son enveloppe tout le long de la caractéristique correspondante.*

Les coefficients directeurs de la normale à l'enveloppée en un point ordinaire sont F'_x, F'_y et F'_z. On peut considérer aussi $F = 0$ comme l'équation de l'enveloppe, à condition d'y remplacer α par sa valeur en x, y, z tirée de $F'_\alpha = 0$. Donc les coefficients directeurs de la normale à l'enveloppe sont $F'_x + F'_\alpha \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \cdots$ Mais F'_α s'annule sur l'enveloppe, de sorte que ces coefficients ont les mêmes valeurs que pour l'enveloppée. Donc l'enveloppe et l'enveloppée ont même normale et, par suite, même plan tangent le long de la caractéristique commune.

Réciproquement, si l'on cherche une surface (E) *qui touche, en chacun de ses points, une des surfaces de la famille, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, soit M un point de (E), ce sera le point de contact de (E) avec la surface particulière (α_0). Menons par M un plan quelconque coupant les surfaces suivant des sections que nous appellerons aussi (E) et (α). La section (E) est tangente aux sections planes (α). C'est donc leur enveloppe et M est un point-caractéristique (au sens des enveloppes planes) pour la section (α_0) qui passe par ce point ; sa

distance à la section $(\alpha_0 + d\alpha)$, est d'ordre supérieur à $d\alpha$: c'est dire que M est aussi un point-caractéristique pour la surface (α_0). Donc la surface tangente, étant un lieu de points-caractéristiques, est une enveloppe.

Il suit de là qu'*une surface dont le plan tangent ne dépend que d'un seul paramètre est l'enveloppe de son plan tangent.*

382. Enveloppe d'une famille de surfaces à deux paramètres. — Considérons maintenant une famille doublement infinie de surfaces, c'est-à-dire dépendant de deux paramètres arbitraires α, β.

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Un *point-caractéristique* de la surface (α, β) est un point ordinaire tel que sa distance à toute surface infiniment voisine $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ soit un infiniment petit d'ordre supérieur à $|d\alpha| + |d\beta|$. On en conclut que ses coordonnées doivent vérifier les trois équations

$$F = 0, \qquad F'_\alpha = 0, \qquad F'_\beta = 0.$$

Si ces trois équations définissent des points dont les coordonnées sont fonctions continues de α, β, *l'enveloppe de la famille est le lieu géométrique de ces points-caractéristiques.* Son équation s'obtient en éliminant α et β entre ces trois équations.

On montre, comme précédemment, que *chaque enveloppée touche son enveloppe en chacun de ses points-caractéristiques.*

Réciproquement, *si l'on cherche une surface* (E) *qui touche toutes les surfaces de la famille, on retrouve l'enveloppe.*

En effet, on peut considérer les coordonnés des points de (E) comme des fonctions x, y, z de α, β, assujetties à vérifier l'équation $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$. On en tire, en dérivant par rapport à α puis à β,

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'_\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} y'_\alpha + \frac{\partial F}{\partial z} z'_\alpha + F'_\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'_\beta + \frac{\partial F}{\partial y} y'_\beta + \frac{\partial F}{\partial z} z'_\beta + F'_\beta = 0.$$

Mais ces équations se réduisent à $F'_\alpha = 0$ et $F'_\beta = 0$ dans l'hypothèse où (E) touche l'enveloppée au point (x, y, z), car alors $x'_\alpha, \ldots$ et $x'_\beta, \ldots$ étant les coefficients directeurs de deux tangentes à (E), sont aussi ceux de deux tangentes à l'enveloppée et les termes qui contiennent ces coefficients se détruisent. On retrouve donc les trois équations de l'enveloppe.

Il suit de là qu'*une surface dont le plan tangent dépend de deux paramètres, est aussi l'enveloppe de son plan tangent.*

383. Enveloppe d'une famille de courbes dans l'espace. — Considérons une famille de courbes de l'espace dépendant d'un paramètre arbitraire α et définie par les deux équations

$$(3) \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Si on appelle encore *point-caractéristique* de la courbe (α) un point *ordinaire* tel que sa distance à la courbe infiniment voisine ($\alpha + d\alpha$) soit un infiniment petit d'ordre supérieur à $d\alpha$, on voit, comme dans le cas des courbes planes, que ses coordonnées doivent vérifier les deux équations

$$(4) \qquad F'_\alpha = 0, \qquad \Phi'_\alpha = 0.$$

En général, les équations (3) et (4) sont incompatibles, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α, et il n'y a pas de points-caractéristiques. Mais, s'il existe des points-caractéristiques dont la position varie d'une manière continue avec α, autrement dit, si les équations (3) et (4) admettent des solutions communes x, y, z fonctions continues de α, le lieu de ces points s'appelle l'*enveloppe* de la famille de courbes.

D'après cela, une famille de courbes de l'espace n'admet généralement pas d'enveloppe.

THÉORÈMES. — *Si une famille de courbes admet une enveloppe, chaque enveloppée touche l'enveloppe au point-caractéristique correspondant.*

La démonstration se fait comme pour les courbes planes.

Réciproquement, s'il existe une courbe (E) *qui touche, en chacun de ses points, une des courbes de la famille, cette courbe n'est autre que l'enveloppe.*

En effet, les coordonnées x, y, z des points M de la courbe (E) seront des fonctions de α, assujetties à vérifier les équations (3). Si l'on dérive totalement ces équations par rapport à α, il vient (les accents désignant les dérivées par rapport à α),

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + F'_\alpha = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \cdots + \Phi'_\alpha = 0.$$

Mais les termes en x', y', z' se détruisent, parce que la tangente à la courbe (E) est la même qu'à l'enveloppée par hypothèse. Ces équations se réduisent donc aux deux équations $F'_\alpha = 0$, $\Phi'_\alpha = 0$, qui déterminent l'enveloppe.

384. Enveloppe de caractéristiques (Arête de rebroussement). — Une classe importante de courbes ayant une enveloppe est celle des caractéristiques d'une famille de surfaces à un paramètre $F(x, y, z, \alpha) = 0$. Les quatre équations (3) et (4) se réduisent effectivement à trois seulement

$$F = 0, \qquad F'_\alpha = 0, \qquad F''_\alpha = 0.$$

Les valeurs de x, y, z, généralement fonctions de α, que l'on en tire, définissent une courbe qui touche toutes les caractéristiques et qu'on appelle l'*arête de rebroussement* (¹) de la surface enveloppe.

385. Surface enveloppe (ou focale) d'une congruence de courbes. — On donne le nom de congruence à un ensemble de courbes dépendant de deux paramètres arbitraires α et β et définies par deux équations :

$$(5) \qquad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Considérons une courbe particulière $[\alpha, \beta]$. On peut concevoir qu'elle fasse partie d'une famille à un paramètre en posant une relation $\beta = \varphi(\alpha)$, compatible avec les paramètres particuliers de la courbe. On peut, en général, choisir cette dépendance de façon à former une famille à un paramètre ayant une enveloppe, c'est-à-dire de manière qu'il y ait sur la courbe $[\alpha, \beta]$ des points-caractéristiques. Les coordonnées x, y, z d'un point-caractéristique doivent satisfaire, en effet, aux équations

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Si l'on élimine x, y, z entre les équations (5) et (6), on obtient une équation différentielle du premier ordre entre α et β servant à déterminer la relation $\beta = \varphi(\alpha)$. D'autre part, en éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre les deux équations (6), on a, pour déterminer les points-caractéristiques sur la courbe $[\alpha, \beta]$, les trois équations :

$$(7) \qquad F = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

Nous supposerons que ces trois équations soient compatibles et déterminent les coordonnées d'un ou de plusieurs points en fonction continue de α, β. Ces points s'appellent *les points focaux*. Généralement, et nous supposerons que ce soit le cas, le lieu de ces points est

(¹) Parce que les points de cette arête sont généralement des points de rebroussement pour les sections de l'enveloppe par un plan.

une surface que l'on appelle l'*enveloppe* ou la *surface focale* de la congruence.

Le système de valeurs x, y, z, fonctions continues de α, β, qu'on obtient en résolvant les équations (7), fournit une représentation paramétrique de la surface focale. L'équation en x, y, z de cette surface s'obtient en éliminant α et β entre les équations (7).

Théorème. — *Chaque courbe de la congruence touche la surface focale en chacun de ses points focaux.*

En effet, les composantes dx, dy, dz d'un déplacement tangentiel à la surface focale correspondent à un système d'accroissements quelconques $d\alpha$, $d\beta$ des paramètres et sont liés par les relations

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial F}{\partial \beta}\,d\beta = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,d\beta = 0. \end{cases}$$

En particulier, si $d\alpha$, $d\beta$ vérifient *simultanément* les deux équations :

$$(9)\qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \beta}\,d\beta = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\,d\beta = 0,$$

compatibles en vertu de la troisième équation (7), le déplacement dx, dy, dz se fera sur la tangente à la courbe $[\alpha, \beta]$. Donc cette courbe touche la surface focale.

Réciproquement, si l'on cherche une surface qui touche en chaque point une courbe de la congruence, on retrouve la surface focale.

En effet, les coordonnées x, y, z des points de la surface seront des fonctions de α, β assujetties à vérifier les équations $F = 0$, $\Phi = 0$. Différentions totalement ces équations pour un déplacement tangent à la courbe $[\alpha, \beta]$; nous trouverons les équations (8), se réduisant aux équations (9), puis, en éliminant $d\beta : d\alpha$, la troisième équation (7), qui détermine la surface focale.

Exercices.

1. Montrer que l'enveloppe du plan qui coupe les axes rectangulaires aux distances respectives $\alpha^2 : (a+\alpha)$, $\beta^2 : (b+\beta)$, $\gamma^2 : (c+\gamma)$ a pour équation $(x+y+z)^2 + 4\,(ax+by+cz) = 0$.

2. L'enveloppe des plans tangents aux différents points d'une section plane d'un ellipsoïde est une surface conique. Discuter.

3. Une *surface canal* est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe. La caractéristique est alors le grand

cercle qui se trouve dans le plan normal à la courbe. Étudier le cas où le rayon varie en même temps que le centre se déplace.

4. L'enveloppe du plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$, dont les paramètres sont liés par les relations $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ et

$$\frac{\alpha^2}{l^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{l^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{l^2 - c^2} = 0,$$

est la *surface des ondes*

$$\frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

§ 6. Systèmes de droites : Surfaces réglées ; Congruences.

386. Surfaces réglées développables ou gauches. — On appelle *réglée* une surface qui est le lieu des positions successives d'une droite mobile nommée *génératrice*. Il y en a de deux espèces, les *surfaces développables* et les *surfaces gauches*. Nous commençons par l'étude des développables. Ce nom leur vient de la propriété d'être *applicables* sur un plan, que nous examinerons plus loin au nº 389.

Remarque générale. — Nous supposerons, dans toute cette théorie, que les fonctions à considérer sont *uniformes, continues et indéfiniment dérivables.* La plupart des théorèmes tomberaient en défaut dans l'hypothèse de la non dérivabilité.

387. Surfaces développables. — *On appelle développable toute surface qui est l'enveloppe d'un plan mobile à un paramètre.* Soit le plan mobile

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

où A, B, C dépendent d'un paramètre α. Si le plan se déplaçait parallèlement à lui-même ou en tournant autour d'une droite fixe, il n'y aurait pas de surface enveloppe. Nous excluons donc ces deux cas. La *caractéristique* du plan (nº 384) s'obtient alors en joignant à la précédente l'équation dérivée par rapport à α,

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

et ces caractéristiques sont les *génératrices* rectilignes de la surface.

Théorème. — *Le plan tangent est le même le long de toute droite de la développable.*

En effet, le plan tangent en un point de la développable est le plan $Ax + By + Cz + D = 0$ passant par ce point (n° 381). S'il variait le long d'une droite de la surface, comme il contient cette droite, il ne ferait que tourner autour d'elle et n'envelopperait pas une surface.

THÉORÈME. — *Toute droite de la surface est une des caractéristiques.*

En effet, si une droite Δ n'était pas une caractéristique, la surface serait le lieu des caractéristiques s'appuyant sur Δ. Le plan tangent, ne changeant ni le long d'une caractéristique, ni le long de Δ, serait le même partout et la développable se réduirait à ce plan.

Ainsi une développable ne peut admettre qu'un seul système de génératrices rectilignes et le plan tangent est le même le long d'une génératrice.

ARÊTE DE REBROUSSEMENT. — En général, les caractéristiques restent tangentes à une courbe, appelée *arête de rebroussement* de la développable (n° 384), et qui se définit en joignant aux deux équations de la caractéristique la suivante :

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0,$$

obtenue par une nouvelle dérivation, ce qui fait un système de trois équations linéaires d'où l'on peut tirer x, y, z en fonction de α.

Mais il y a deux cas d'exception à signaler : Si l'arête se réduit à un point, la développable est un *cône*, et c'est un *cylindre* si ce point est rejeté à l'infini.

THÉORÈME. — *Réciproquement, le lieu des tangentes à une courbe gauche est une surface développable, à savoir l'enveloppe du plan osculateur de cette courbe.*

En effet, le plan osculateur, variable le long de la courbe, ne dépend que d'un seul paramètre, celui du point de contact. Les caractéristiques (intersections de deux plans osculateurs infiniment voisins) sont les tangentes à la courbe (*t.* I, n° 327), donc l'enveloppe du plan est le lieu des tangentes.

Ainsi les développables sont des surfaces réglées dont les génératrices ont une courbe enveloppe, ou bien passent par un point fixe (cône) ou bien ont une direction fixe (cylindre).

Cette courbe enveloppe est *l'arête de rebroussement* de la surface. Si elle était plane, la surface dégénérerait dans un plan.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la droite mobile*

(1) $$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

dont les coefficients dépendent d'un paramètre α, engendre une surface développable (ou un plan), est que l'on ait

(2) $$a'q' - b'p' = 0.$$

En effet, pour que la droite (1) soit la caractéristique d'un plan mobile, il faut que ses équations puissent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0\,; \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0\,; \end{cases}$$

d'où, en éliminant x et y par (1), les quatre conditions :

$$\begin{cases} Aa + Bb + C = 0, \\ Aq + Bq + D = 0\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} A'a + B'p + C' = 0, \\ A'p + B'q + D' = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs on peut remplacer les deux dernières par les deux suivantes, qui s'en déduisent en dérivant les deux premières :

$$\begin{cases} Aa' + Bb' = 0, \\ Ap' + Bq' = 0. \end{cases}$$

Pour que ces équations soient compatibles et permettent de déterminer A, B et ensuite C, D, il faut et il suffit que $a'q' - b'q' = 0$.

Si cette condition a lieu, la droite (1) engendre une surface développable, à moins que $Ax + By + Cz + D = 0$ ne se réduise à un plan fixe, auquel cas la droite se meut dans ce plan.

388. Equation aux dérivées partielles des développables. — Les surfaces développables satisfont à une équation aux dérivées partielles qui les caractérise. Considérons l'ordonnée z comme une fonction de x, y sur la surface ; et posons, en abrégé,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice ; les coefficients de son équation, qui est

$$\zeta - z - p\,(\xi - x) - q\,(\eta - y) = 0,$$

en particulier p et q, ne dépendent que du seul paramètre qui définit la position de la génératrice de contact. Donc p et q sont aussi fonc-

tions l'un de l'autre et l'on a, par le théorème général sur les déterminants fonctionnels (nº 276),

$$\frac{d(p, q)}{d(x, y)} = rt - s^2 = 0.$$

Donc l'ordonnée z d'une développable satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre $rt - s^2 = 0$.

Réciproquement, $rt - s^2 = 0$ est l'équation aux dérivées partielles d'une développable. En effet, elle exprime d'abord que p et q sont fonctions l'un de l'autre. Mais on a aussi

$$\frac{d(p, z - px - qy)}{d(x, y)} = - \begin{vmatrix} r, & xr + ys \\ s, & xs + yt \end{vmatrix} = y(s^2 - rt) = 0.$$

Donc le troisième coefficient $(z - px - qy)$ de l'équation du plan tangent est aussi fonction du premier p. La surface, qui est l'enveloppe de ses plans tangents, est donc l'enveloppe d'une famille de plans à un paramètre : c'est une surface développable.

389. Surfaces applicables sur un plan. — On dit que deux surfaces sont *applicables* l'une sur l'autre, lorsque l'on peut établir entre leurs points une correspondance telle que les arcs correspondants aient même longueur sur les deux surfaces. Nous allons montrer que les surfaces développables peuvent être caractérisées par la propriété d'être applicables sur un plan.

1°) *Une surface développable est applicable sur un plan.*

Soient x, y, z les coordonnées d'un point O de l'arête de rebroussement de la surface, exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe. Les cosinus directeurs de la tangente au point O seront x', y', z', en désignant par des accents les dérivées par rapport à s. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point M de cette tangente situé à la distance (positive ou négative) u du point O, seront

$$\xi = x + ux', \qquad \eta = y + uy', \qquad \zeta = z + uz'.$$

Nous avons ainsi exprimé les coordonnées d'un point quelconque de la développable en fonction des deux paramètres u et s.

Cherchons l'expression de la différentielle $d\sigma$ de l'arc d'une courbe tracée sur la développable. On a

$$d\sigma^2 = \Sigma d\xi^2 = \Sigma[(x' + ux'')\,ds + x'\,du]^2,$$

Soient R le rayon de courbure et λ, μ, ν les cosinus directeurs de

la normale principale de l'arête au point O. On a $x'' = \lambda : R, \ldots$ $\Sigma x'^2 = 1$ et $\Sigma x'\lambda = 0$; il vient donc

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{u^2}{R^2}\right) ds^2 + 2\, du\, ds + du^2 = (du + ds)^2 + \left(\frac{u\, ds}{R}\right)^2 .$$

Cette expression ne dépend que de la relation $u = \varphi(s)$ qui définit la courbe tracée sur la surface et du rayon de courbure R de l'arête, nullement de la torsion de celle-ci.

Or R est une fonction déterminée $f(s)$ de l'arc ; et la relation $R = f(s)$ est aussi l'*équation intrinsèque* (n° 255) d'une courbe plane que nous pouvons construire. Faisons correspondre au point O de l'arête celui O' de cette courbe plane qui est déterminé par la même valeur de s ; les rayons de courbure correspondants seront les mêmes. Portons maintenant, sur la tangente en O' à la courbe plane, une longueur O'M' égale à OM, donc égale à u ; nous déterminerons ainsi dans le plan de cette courbe un point M' correspondant au point M de la développable. Ce mode de correspondance entre les points de la développable et ceux du plan conserve la longueur des arcs, car les différentielles $d\sigma$ des arcs de deux courbes correspondantes, donc définies toutes deux par la même relation $u = \varphi(s)$, ont même expression pour les deux courbes.

La démonstration précédente tombe en défaut pour le *cône* et le *cylindre*, mais le théorème subsiste comme le lecteur peut le vérifier facilement lui-même.

2°) *Réciproquement, une surface applicable sur un plan est développable.*

Soient α, β les coordonnées des points du plan sur lequel on applique la surface. Nous pouvons considérer les coordonnées x, y, z des points de la surface comme des fonctions de celles α, β des points correspondants du plan. Les longueurs étant conservées, aux droites qui sont les lignes les plus courtes du plan, doivent correspondre les lignes géodésiques de la surface. Faisons varier α, β sur une droite (D) de direction arbitraire, nous pourrons prendre $d\alpha$ et $d\beta$ tous deux constants ; alors $ds = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}$, qui, aussi la différentielle de l'arc de la géodésique (g) correspondante, est constant également. Les cosinus directeurs de la normale principale de (g) sont (ds étant constant) proportionnels à d^2x, d^2y et d^2z. Mais, d'autre part, puisque c'est une géodésique, ils sont aussi proportionnels aux coefficients

directeurs p, q et -1 de la normale à la surface (nº 323). On a donc, pour $d\alpha$ et $d\beta$ constants, les *identités* en α, β, $d\alpha$ et $d\beta$:

$$d^2x + p\,d^2z = 0, \qquad d^2y + q\,d^2z = 0.$$

Remplaçons dans ces deux équations d^2x, d^2y et d^2z par leurs expressions développées en $d\alpha$ et $d\beta$; les coefficients de $d\alpha^2$, $d\alpha\,d\beta$ et $d\beta^2$ seront nuls séparément. On aura, en particulier,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2} + p\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + p\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0;$$

puis, en multipliant respectivement par $d\alpha$, $d\beta$ et ajoutant,

$$d\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) + p d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right) = 0; \text{ de même, } d\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) + q d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Il suit de ces deux identités que $p\,d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)$ et $q\,d\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)$ sont des différentielles exactes, donc que p et q sont fonctions de $\frac{\partial z}{\partial\alpha}$, donc d'un même paramètre [1]. Ainsi, p et q étant fonctions l'un de l'autre, la surface est développable, comme on l'a vu au nº précédent.

390. Surfaces réglées en général et propriétés des surfaces gauches en particulier. — Toute surface réglée peut être considérée comme engendrée par une *génératrice* G qui s'appuie constamment sur une courbe *directrice* Γ. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la directrice Γ exprimées en fonction d'une variable indépendante t ; a, b, c les cosinus directeurs (fonctions de t) de la génératrice G qui passe par ce point t ; u la distance (positive ou négative) d'un point M de G au point x, y, z. Les cordonnées ξ, η, ζ du point M de la génératrice G seront données par les formules

$$\text{(G)} \qquad \xi = x + au, \qquad \eta = y + bu, \qquad \zeta = z + cu.$$

Celles ξ_1, η_1, ζ_1 d'un point M_1 de la génératrice G_1 infiniment voisine, menée par le point $(t + \Delta t)$ de la directrice, seront, de même,

$$(\text{G}_1) \quad \xi_1 = x_1 + a_1u_1, \qquad \eta_1 = y_1 + b_1u_1, \qquad \zeta_1 = z_1 + c_1u_1,$$

où l'on a

$$x_1 = x + \Delta x, \qquad a_1 = a + \Delta a, \qquad y_1 = y + \Delta y, \ldots$$

Cherchons la plus courte distance de la génératrice G à la génératrice infiniment voisine G_1. Le carré de la distance δ de deux points

[1] En effet, si $p\,d\text{F}$ est une différentielle exacte, comme elle s'annule avec $d\text{F}$, c'est la différentielle d'une fonction de F seul, donc aussi p qui est la dérivée de cette fonction.

$M(\xi, \eta, \zeta)$ et $M_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ de ces deux génératrices a pour expression

$$(4) \qquad \delta^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 = \Sigma(\xi_1 - \xi)^2.$$

Pour obtenir son minimum, il faut annuler ses deux dérivées par rapport à u et u_1, ce qui donne, eu égard aux valeurs de $\xi, \xi_1, \ldots$

$$\Sigma(\xi_1 - \xi)\,a = 0, \qquad \Sigma(\xi_1 - \xi)\,a_1 = 0.$$

Mais comme $a_1 = a + \Delta a, \ldots$ ce système peut être remplacé par le suivant :

$$(5) \qquad \Sigma(\xi_1 - \xi)\,a = 0, \qquad \Sigma(\xi_1 - \xi)\,\Delta a = 0.$$

Faisons dans ces deux équations les substitutions

$$\xi_1 - \xi = \Delta x + a_1 u_1 - au = \Delta x + a(u_1 - u) + u_1\,\Delta a, \ldots$$

La première équation montrera que u_1 tend vers u quand Δt tend vers 0, et la seconde deviendra

$$\Sigma\,\Delta a\,\Delta x + u_1 \Sigma\,\Delta a^2 + (u_1 - u)\,\Sigma a \Delta a = 0.$$

Divisons par Δt^2 et passons à la limite ; en désignant par des accents les dérivées par rapport à t et en remplaçant u_1 par sa limite u, il vient simplement

$$\Sigma a'x' + u\,\Sigma a'^2 = 0,$$

car le rapport $\Sigma a \Delta a : \Delta t^2$ reste fini ($\Sigma aa'$ étant nul, car $\Sigma a^2 = 1$). De là, la valeur de u :

$$(6) \qquad u = -\frac{\Sigma\,a'x'}{\Sigma a'^2}.$$

Cette valeur (positive ou négative) de u détermine sur la génératrice G un point O, qui est le pied de la perpendiculaire commune avec la génératrice infiniment voisine, et qu'on appelle le *point central*. Le lieu de ce point quand la génératrice varie, est une courbe de la surface appelée *ligne de striction*. Dans le cas particulier où la surface est développable, le point central est un *point-caractéristique* et la ligne de striction, l'*arête de rebroussement* de la développable.

L'équation (6) montre quelle est la *condition pour que la directrice* Γ *soit la ligne de striction (ou l'arête de rebroussement) ; il faut et il suffit que l'on ait* $u = 0$, *donc*

$$\Sigma\,a'x' = a'x' + b'y' + c'z' = 0.$$

Déterminons maintenant les cosinus directeurs λ, μ, ν de la plus courte distance δ. A cette effet, remplaçons dans les équations (5)

$\xi_1 - \xi, \ldots$ par les quantités proportionnelles $\lambda\ldots$; elles deviennent $\Sigma\lambda a = 0$, $\Sigma\lambda\Delta a = 0$. On en tire, par les propriétés des fractions égales, en désignant par φ l'angle des deux génératrices infiniment voisines G et G_1,

$$(7) \qquad \frac{\lambda}{b\,\Delta c - c\,\Delta b} = \frac{\mu}{c\,\Delta a - a\,\Delta c} = \frac{\nu}{a\,\Delta b - b\,\Delta a} = \pm\frac{1}{\sin\varphi},$$

car on sait, par la géométrie analytique, que

$$\Sigma\lambda^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \Sigma(b\,\Delta c - c\,\Delta b)^2 = \sin^2\varphi.$$

Enfin, $\Sigma\lambda a$ et $\Sigma\lambda a_1$ étant nuls, la plus courte distance δ elle-même sera

$$\delta = \Sigma\lambda(\xi_1 - \xi) = \Sigma\lambda\,(\Delta x + a_1 u_1 - au) = \Sigma\lambda\,\Delta x\,;$$

ou, en remplaçant λ, μ, ν par leurs valeurs (7),

$$\delta = \pm\frac{1}{\sin\varphi}\,\Sigma\,\Delta x\,(b\,\Delta c - c\,\Delta b) = \pm\frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix} a & \Delta a & \Delta x \\ b & \Delta b & \Delta y \\ c & \Delta c & \Delta z \end{vmatrix}$$

Comme on dispose du signe de φ, on peut le déterminer en prenant le signe $+$ dans l'équation précédente. Nous écrirons, en abrégé, $\delta\sin\varphi = [a, \Delta a, \Delta x]$; et, en développant jusqu'aux termes du troisième ordre, nous aurons

$$\delta\sin\varphi = [a, da, dx] + \frac{1}{2}[a, d^2a, dx] + \frac{1}{2}[a, da, d^2x] + \cdots$$
$$= [a, da, dx] + \frac{1}{2}d[a, da, dx] + \cdots$$

Le facteur $\sin\varphi$, qui a pour valeur principale $\sqrt{\Sigma(bdc - cdb)^2}$ ou $\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$, est du premier ordre, de sorte que, en général, δ est du premier ordre en dt. Si δ est d'ordre plus élevé, le point central est un *point-caractéristique* et la surface est développable. Donc *la condition pour que la surface soit développable est que l'on ait* $[a, da, dx] = 0$. Mais alors la différentielle de ce déterminant s'annule aussi, de sorte que δ est du troisième ordre. Donc, *dans une surface développable, la distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre.*

Supposons maintenant la surface gauche. Divisons la dernière équation par $\sin^2\varphi$ et passons à la limite ; il vient

$$(8) \qquad \lim\frac{\delta}{\sin\varphi} = \frac{[a, da, dx]}{da^2 + db^2 + dc^2} = \frac{[a, a', x']}{a'^2 + b'^2 + c'^2} = -k,$$

k désignant une quantité de signe déterminé, variable d'une génératrice à l'autre, nommée *paramètre de distribution*.

Ce paramètre joue, dans la théorie du plan tangent aux surfaces gauches, un rôle important, que nous allons mettre en lumière en faisant varier le point de contact le long d'une génératrice G et en cherchant la loi de la rotation du plan tangent autour de cette génératrice.

A cet effet, prenons cette génératrice G pour axe des z, puis, pour axe des y, la normale à la surface au point central et supposons que la ligne de striction ait été prise comme directrice (Γ). Nous aurons $a = 0, b = 0, c = 1$, d'où $c' = 0$ (c étant maximum), ensuite $y' = 0$ (l'axe des y étant normal à Γ), enfin $a' = 0$ (car $\Sigma a'x' = 0$ se réduit à $a'x' = 0$ et que x' n'est pas constamment nul, auquel cas Γ et G seraient tangents et la surface serait développable).

Ceci posé, les cosinus directeurs X, Y, Z ($Z = 0$) de la normale à la surface en un point $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = u$ de la génératrice G sont déterminés par la condition

$$X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta = X\,d\xi + Y\,d\eta = 0,$$

qui doit avoir lieu pour tout déplacement sur la surface :

$$d\xi = (x' + a'u)\,dt + a\,du = x'dt,$$
$$d\eta = (y' + b'u)\,dt + b\,du = b'u\,dt,$$

d'où la condition

$$Xx' + Yb'u = 0.$$

Soit φ l'angle du plan tangent au point u de la génératrice G avec le plan tangent au point central qui s'appelle le *plan central*. On a $X = \pm \sin\varphi$, $Y = \pm \cos\varphi$, d'où

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{X}{Y} = \frac{b'u}{x'} = \frac{u}{k},$$

car la valeur (8) du paramètre de distribution se réduit à $x' : b'$ quand $a = b = a' = 0$ et $c = 1$. De là, le théorème de Chasles : *La tangente de l'inclinaison du plan tangent sur le plan central varie, sur chaque génératrice, proportionnellement à la distance du point de contact au point central.* Quand le point de contact se déplace, le plan tangent tourne autour de la génératrice dans un sens ou dans l'autre suivant le signe du paramètre de distribution k.

391. Congruences de droites. — Considérons une congruence de droites

$$(9)\qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

les coefficients dépendant de deux paramètres α, β et rappelons-nous les résultats généraux du n° 385. Toutes les droites D de la congruence sont tangentes à une même surface S appelée *surface focale.* Les points où la droite D touche S sont ses *points focaux*. Pour trouver ces points, on considère la droite D comme faisant partie d'une famille à un paramètre, au moyen d'une relation $\beta = \varphi(\alpha)$ compatible avec les paramètres de D et telle qu'il y ait des *points-caractéristiques* sur D, et ces points-caractéristiques sont les points focaux.

Ainsi, pour les obtenir, nous combinons les équations (9) avec leurs dérivées totales par rapport à α :

$$(10)\qquad 0 = a'z + p', \qquad 0 = b'z + q',$$

et nous choisissons $\varphi(\alpha)$ de manière que ces équations soient compatibles, c'est-à-dire par la condition

$$(11)\qquad a'q' - b'p' = 0.$$

où l'on a

$$a' = \frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \beta}\beta', \qquad q' = \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial q}{\partial \beta}\beta', \ldots$$

de sorte que la condition (11) prend la forme

$$(12)\qquad \mathrm{P}\,\beta'^2 + \mathrm{Q}\,\beta' + \mathrm{R} = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions connues de α, β. Cette équation du second degré a, en général, deux racines, que nous supposerons réelles :

$$(13)\qquad \beta' = \varphi_1(\alpha, \beta), \qquad \beta' = \varphi_2(\alpha, \beta).$$

Portant ces valeurs de β' dans les équations (10), nous obtenons deux valeurs correspondantes pour z. Il y a donc, sur chaque génératrice de la congruence, deux points focaux F_1 et F_2 et la surface focale S se compose de deux nappes S_1 et S_2, dont chacune est touchée en un point par chaque génératrice de la congruence.

Les calculs que nous venons de faire résolvent la question de faire passer, par une droite D de la congruence, une surface développable dont les génératrices appartiennent à la congruence. Il faut, en effet, pour cela, poser une relation $\beta = \varphi(\alpha)$, vérifiée par les coordonnées de D et telle qu'on ait la relation (11), donc aussi les relations (12) et (13). Les équations différentielles (13) déterminent complètement

deux relations $\beta = \varphi(\alpha)$ satisfaisant aux conditions du problème. De là, la conclusion suivante :

Il existe deux surfaces développables Δ_1 et Δ_2 passant par une génératrice arbitraire et formées de droites de la congruence.

Les points focaux F_1 et F_2 de la génératrice D sont ceux où cette génératrice touche respectivement les arêtes de rebroussement A_1 et A_2 des deux développables Δ_1 et Δ_2. Ces arêtes sont donc situées respectivement sur les nappes S_1 et S_2 de la surface focale, qui est leur lieu géométrique.

Considérons, en particulier, la développable Δ_1 engendrée par une suite de génératrices D, D′, D″,... (fig. 6). Les points focaux successifs F_1, F_1', F_1'',... dessinent sur S_1 l'arête de rebroussement A_1 ; les points focaux F_2, F_2', F_2'',... dessinent sur S_2 une autre courbe de Δ_1, qui n'est pas tangente à la droite D. Donc D et la tangente à cette courbe déterminent le plan tangent à la développable au point F_2 (donc le long de D) et aussi le plan tangent à S_2 au même point F_2. Donc ces deux plans tangents coïncident, et l'on a le théorème suivant :

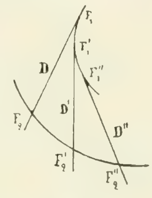


Fig. 6.

Les plans tangents à la surface focale aux points focaux, ou les PLANS FOCAUX, *sont les plans tangents aux deux développables qui passent par chaque génératrice.*

De là cette autre conclusion :

Chacune des deux développables qui passent par une génératrice D *de la congruence a son arête de rebroussement sur une des nappes de la surface focale et est circonscrite à l'autre nappe.*

Un plan focal est donc, en même temps, plan tangent à l'une des nappes et plan osculateur de l'arête de rebroussement tracée sur l'autre. Donc, si les deux plans focaux sont rectangulaires, le plan osculateur de l'arête est normal à la surface focale. Si cette condition se réalise pour toutes les droites de la congruence, les arêtes de rebroussement des développables passant par les diverses génératrices seront des *lignes géodésiques* de la surface focale. Comme on le verra au n° suivant, cette condition se réalise dans les congruences de normales à une surface.

Remarque. — Ces conclusions générales supposent que les points focaux F_1 et F_2 ne soient pas confondus et que chacun d'eux décrive une surface, ce qui est évidemment le cas général.

392. Congruences de normales à une surface. — Demandons-nous si les droites d'une congruence arbitraire,

$$(14) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

restent normales à une même surface, les coefficients a, p, b, q étant donc fonctions de deux paramètres α et β.

S'il en est ainsi, les coordonnées x, y, z des points de la surface seront des fonctions de α et de β assujetties à vérifier les équations précédentes. Mais, de plus, tout déplacement dx, dy, dz sur la surface devant être normal à la droite (14), on aura la condition (x, y, z étant fonctions de α, β)

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0\,;$$

ou, en remplaçant dx et dy par leurs valeurs tirées de (14),

$$(a^2 + b^2 + 1)dz + z(a\,da + b\,db) + a\,dp + b\,dq = 0,$$

ce qui, après division par $\sqrt{1+a^2+b^2}$, peut s'écrire plus simplement

$$d(z\sqrt{1+a^2+b^2}) + \frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = 0.$$

C'est un équation aux différentielles totales entre z, α et β, qui doit servir à déterminer z. Mais, pour que cette détermination soit possible, il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{a\,dp + b\,dq}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

soit une différentielle totale exacte. Cette condition entraîne une relation entre les quatre fonctions a, b, q et q de α, β. Donc *il n'existe pas, en général, de surface normale aux droites d'une congruence donnée.*

La condition que nous venons de trouver est susceptible d'une interprétation géométrique très remarquable. Prenons comme variables indépendantes les coordonnées p et q du pied de la droite D sur le plan xy (¹). La condition d'intégrabilité deviendra

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\right).$$

(¹) Ceci est permis. En effet, si p et q étaient liés par une relation, le plan xy couperait la congruence suivant une courbe et, pour éviter ce cas, on changerait d'axes coordonnés. Il est d'ailleurs impossible que la congruence soit coupée suivant une courbe par un plan quelconque, sinon elle se réduirait à une surface.

D'autre part, l'équation (11) deviendra

$$\frac{\partial a}{\partial q}q'^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial q}\right)q' - \frac{\partial b}{\partial p} = 0$$

et les deux racines q'_1 et q'_2 de cette équation seront les coefficients angulaires dans le plan xy des courbes d'intersection par ce plan des deux développables passant par D. Les deux plans tangents à ces développables le long de D, devant contenir D et l'une de ces tangentes respectivement, auront pour équations

$$q'_1(x - az - p) = (y - bz - q), \qquad q'_2(x - az - p) = (y - bz - q).$$

La condition de perpendicularité de ces deux plans est

$$1 + b^2 - ab(q'_1 + q'_2) + q'_1 q'_2(1 + a^2) = 0,$$

ou bien, en remplaçant les racines q' par leurs valeurs,

$$\frac{\partial a}{\partial q}(1 + b^2) + ab\left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial q}\right) - \frac{\partial b}{\partial p}(1 + a^2) = 0,$$

ce qui coïncide avec la condition (15) d'intégrabilité. On a donc le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites soit une congruence de normales, est que les deux plans focaux d'une génératrice quelconque soient rectangulaires.

§ 7. Application aux courbes gauches. Surface polaire. Développées.

393. Enveloppes des plans du trièdre principal. — Si l'on considère un point M sur une courbe gauche et le trièdre principal correspondant, ce trièdre varie avec le point M et chacun des trois plans du trièdre enveloppe une surface développable.

Les trois plans du trièdre sont le *plan osculateur* perpendiculaire à la binormale, le *plan normal* perpendiculaire à la tangente, enfin le plan perpendiculaire à la normale principale que l'on appelle *plan rectifiant*.

Le plan osculateur a pour caractéristique la tangente et pour enveloppe, la *développable des tangentes*.

Le plan normal, sur lequel nous allons revenir, a pour enveloppe la *développable polaire*.

Quant au *plan rectifiant*, il enveloppe une surface à laquelle on donne le nom de *développable rectifiante*. La courbe considérée se

trouve sur cette surface, car le plan rectifiant contient la tangente, par conséquent, son enveloppe contient l'enveloppe de la tangente, c'est-à-dire la courbe elle-même. On voit, en même temps, que la caractéristique du plan rectifiant passe par le point M, qui est le point caractéristique sur la tangente. La normale principale à la courbe est perpendiculaire au plan tangent à la développable qui est le plan rectifiant, donc la courbe est une géodésique de la développable et *elle se transforme en droite* quand on étend celle-ci sur un plan.

394. Surface polaire. — Etant donnée une courbe gauche :

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

la *surface* ou *développable polaire* est l'enveloppe des plans normaux. Pour obtenir les équations d'une caractéristique, il faut combiner l'équation du plan normal et sa dérivée par rapport à t. Cette droite, dont les équations sont donc

$$(\xi - x)\,x' + (\eta - y)\,y' + (\zeta - z)\,z' = 0,$$

$$(\xi - x)\,x'' + (\eta - y)\,y'' + (\zeta - z)\,z'' = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

s'appelle *droite polaire* ou *axe du plan osculateur* ou encore *axe de courbure*. Elle est perpendiculaire au plan osculateur, car ses coefficients de direction $y'z'' - z'y'' = A, \ldots$ sont les mêmes que ceux de la normale à ce plan. En joignant aux équations de l'axe de courbure celle du plan osculateur, $A(\xi - x) + \cdots = 0$, on obtient les trois équations qui déterminent les coordonnées du centre de courbure (t. I, nº 328). Donc : *Le centre de courbure est le point de percée du plan osculateur par l'axe de courbure.*

Les équations de l'arête de rebroussement de la surface polaire s'obtiennent en ajoutant aux deux équations d'une caractéristique la suivante, obtenue en dérivant une fois de plus :

$$(\xi - x)\,x''' + (\eta - y)\,y''' + (\zeta - z)\,z''' = 3\,(x'x'' + y'y'' + z'z'').$$

395. Sphère osculatrice. — L'équation d'une sphère (de centre ξ, η, ζ et de rayon R arbitraires) renferme quatre paramètres, qui permettent d'obtenir avec la courbe, en un point donné t, un contact du troisième ordre. Les éléments ξ, η, ζ et R de la sphère osculatrice seront déterminés par les quatre équations :

$$\psi(t) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}\psi'(t) = (x - \xi)\,x' + (y - \eta)\,y' + (z - Z)\,z' = 0.$$

$$\psi''(t) = \psi'''(t) = 0.$$

Les trois équations $\psi' = \psi'' = \psi''' = 0$, qui déterminent ξ, η, ζ, sont les mêmes que celles qui déterminent les coordonnées du point où la droite polaire touche son arête de rebroussement et que nous avons écrites au n° précédent. Nous obtenons donc le théorème suivant :

L'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu géométrique du centre de la sphère osculatrice.

396. Développées des courbes gauches. — On appelle *développée* d'une courbe donnée toute courbe qui est une enveloppe de normales, ou toute courbe dont les tangentes viennent rencontrer normalement la courbe donnée.

Soient t le paramètre et x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe gauche ; ξ, η, ζ celles du point N correspondant de la développée ; ρ la longueur MN de la normale ; σ l'arc de la développée compté positivement dans le sens MN. Les équations du problème sont

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{\xi - x} = \frac{d\eta}{\eta - y} = \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{d\sigma}{\rho},$$

$$(2) \qquad (\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0.$$

Il y a donc trois relations distinctes pour déterminer ξ, η, ζ en fonction de t. Commençons par établir quelques propriétés de la développée. Différentions l'équation

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \rho^2$$

en ayant égard à (2) ; il vient

$$(\xi - x)\, d\xi + (\eta - y)\, d\eta + (\zeta - z)\, d\zeta = \rho\, d\rho$$

et, en remplaçant $d\xi$,... par leurs valeurs (1),

$$[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2] \frac{d\sigma}{\rho} = \rho\, d\rho, \quad \text{d'où} \quad d\sigma = d\rho.$$

Donc *la longueur d'un arc de la développée est égale à la différence de longueur des normales à la courbe tangentes à ses extrémités.*

Différentions l'équation (2) en tenant compte de la relation $\Sigma\, d\xi\, dx = 0$ qui résulte immédiatement de (1) et (2) ; il vient

$$(3) \qquad (\xi - x)\, d^2x + (\eta - y)\, d^2y + (\zeta - z)\, d^2z = ds^2.$$

Mais les équations (2) et (3) sont celles de l'axe de courbure du point M. Le point N où la normale MN touche la développée est sur cet axe; donc *toutes les développées d'une courbe sont tracées sur sa surface polaire.*

Passons maintenant à la détermination analytique des développées.

Soit Z le centre de courbure au point M ; menons le rayon de courbure $R = MZ$ et l'axe de courbure ZN (fig. 7). Le segment ZN sera considéré comme positif dans le sens de la binormale de direction (X, Y, Z) et comme négatif en sens contraire. Désignons enfin par θ l'angle de la normale MN avec la normale principale MZ, angle compris entre $\pm 90°$ et de même signe que ZN en sorte que $ZN = R\,\mathrm{tg}\,\theta$.

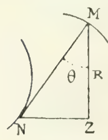


Fig. 7.

Pour obtenir les coordonnées ξ, η, ζ du point N, écrivons que les projections de MN sur les axes sont égales à celles du contour MZN ; nous trouvons

$$(4)\quad \begin{cases} \xi - x = R(\lambda + X\,\mathrm{tg}\,\theta), \\ \eta - y = R(\mu + Y\,\mathrm{tg}\,\theta), \\ \zeta - z = R(\nu + Z\,\mathrm{tg}\,\theta). \end{cases}$$

En remplaçant dans ces équations (4) x, y, z et les second membres en fonction de t, on obtient une représentation paramétrique de la développée. Mais, pour cela, il faut encore connaître la valeur de θ en fonction de t.

A cet effet, différentions les équations (4) ; il vient

$$d\xi = dx + \lambda\, dR + R\, d\lambda + dX(R\,\mathrm{tg}\,\theta) + X\, d(R\,\mathrm{tg}\,\theta)$$

et des valeurs analogues pour $d\eta$, $d\zeta$, Multiplions-les respectivement par X, Y, Z et ajoutons ; de même, par λ, μ, ν et ajoutons. Comme on a $\Sigma X^2 = \Sigma\lambda^2 = 1$, ensuite

$$\Sigma X\, dx = \Sigma\lambda\, dx = \Sigma X\, dX = \Sigma\lambda\, d\lambda = \Sigma\lambda X = 0$$

et (par les formules $dX = \lambda\, ds : T, \ldots$ du t. I, n° 337)

$$\Sigma\lambda \ [illegible] \qquad \Sigma X\, d\lambda = \frac{ds}{T},$$

[illegible]

$$[illegible] \qquad \Sigma\lambda\, d\xi = dR + \frac{ds}{T}(R\,\mathrm{tg}\,\theta).$$

D'autre part, par (1) et (4), il vient aussi

$$\Sigma X\, d\xi = \frac{d\sigma}{\rho}\Sigma X(\xi - x) = \frac{R\, d\sigma}{\rho}\mathrm{tg}\,\theta,$$

$$\Sigma\lambda\, d\xi = \frac{d\sigma}{\rho}\Sigma\lambda(\xi - x) = \frac{R\, d\sigma}{\rho}.$$

Comparant, nous obtenons les deux équations :

$$-\frac{R\, ds}{T} + d(R\,\mathrm{tg}\,\theta) = \frac{R\, d\sigma}{\rho}\mathrm{tg}\,\theta, \qquad \frac{R\, ds}{T}\mathrm{tg}\,\theta + dR = \frac{R\, d\sigma}{\rho}.$$

Soustrayons de la première la seconde multipliée par tg θ ; il reste

$$-\frac{R\,ds}{T}(1+\operatorname{tg}^2\theta)+R\,d\operatorname{tg}\theta=0, \quad \text{d'où} \quad d\theta=\frac{ds}{T}\cdot$$

En définitive, θ est déterminé par une quadrature

(5) $$\theta=\theta_0+\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{T},$$

t étant la variable d'intégration. La valeur initiale θ_0 reste arbitraire. Si l'on porte la valeur (**5**) dans (**4**), on obtient les équations d'une infinité de développées, différant par la valeur initiale θ_0.

La formule (**5**) conduit à une conséquence importante. Si l'on considère deux développées différentes (θ) et (θ') engendrées par les deux normales MN et MN′, on tire de (**5**)

$$\theta-\theta'=\theta_0-\theta'_0.$$

Donc, *si deux normales* MN *et* MN′ *engendrent des développées, elles font entre elles un angle constant.*

Réciproquement, si la normale MN *a une enveloppe, la normale* MN′ *en a une aussi, pourvu qu'elle fasse un angle constant avec* MN.

Remarque. — Si la courbe est plane, la torsion $1 : T$ est nulle et θ se réduit à θ_0. Si l'on prend le plan de la courbe comme plan xy, on a $z=\nu=X=Y=0$ et $Z=1$; les formules (**4**) deviennent

$$\xi=x+R\lambda, \qquad \eta=y+R\mu, \qquad \zeta=R\operatorname{tg}\theta_0.$$

Or ξ, η sont les coordonnées du centre de courbure. Par conséquent, les développées se trouvent sur un cylindre, ce sont les courbes qu'on obtient en prenant, sur chaque normale au plan de la courbe élevée au centre de courbure, une longueur proportionnelle au rayon de courbure correspondant.

La développée ordinaire s'obtient en faisant $\theta_0=0$ et elle est l'enveloppe des normales principales. Mais on observe que les courbes planes sont les seules dont les normales principales aient une enveloppe, car la formule (**5**) montre que θ ne peut être constant que si la torsion est nulle.

Remarque. — Les normales à une courbe gauche (C) forment une congruence de droites (nº 391). Les deux *points focaux* sur une normale sont le point M de la courbe et le point de contact avec la surface polaire. Celle-ci est donc une nappe de la surface focale, tandis

que l'autre nappe dégénère dans la courbe (C) lieu du point M. Par chaque normale passe une vraie développable, contenant (C) et ayant son arête sur la surface polaire, tandis que l'autre est le plan normal perpendiculaire à la première. Ainsi les deux plans focaux sont rectangulaires, la congruence est une congruence de normales à une surface (n° 392) et *les développées sont des géodésiques de la surface polaire.*

§ 8. Courbures des lignes tracées sur une surface.

397. Formule fondamentale. — Il s'agit, dans ce chapitre, d'étudier, en un point M d'une surface S, la courbure des lignes tracées sur la surface et passant par ce point. Les axes seront supposés rectangulaires.

Mettons l'équation de la surface sous la forme

$$z = f(x, y),$$

il sera entendu que z et ses dérivées partielles des deux premiers ordres sont des fonctions déterminées et continues des deux variables x et y. Nous poserons, en abrégé,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Menons la normale MN au point $M(x, y, z)$ de la surface dans le sens où elle fait un angle aigu avec Oz. Ses cosinus directeurs X, Y, Z seront, sans ambiguïté de signe (le radical étant positif),

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{+1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Soient maintenant α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT au point M à une courbe (C) de la surface ; λ, μ, ν les cosinus directeurs du rayon de courbure R de cette courbe, et θ l'angle de R avec la normale à la surface. On a (*t.* I, n° 331)

$$\cos\theta = X\lambda + Y\mu + Z\nu = \frac{R(X\,d\alpha + Y\,d\beta + Z\,d\gamma)}{ds}.$$

Substituons les valeurs

$$d\alpha = d\frac{dx}{ds} = \frac{d^2x}{ds} - \frac{dx\,d^2s}{ds^2}, \dots$$

et observons que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est nul, parce que le déplace-

ment dx, dy, dz sur la courbe (C) est perpendiculaire à la normale à la surface ; il vient

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z}{ds^2}.$$

Remplaçons maintenant d^2z par sa valeur

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + p\,d^2x + q\,d^2y\,;$$

les termes en d^2x et, d^2y disparaîtront, car leurs coefficients $X + pZ$ et $Y + qZ$ sont nuls ; et en substituant encore à Z la valeur indiquée plus haut, il restera

$$(2) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{ds^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ou encore, en introduisant les cosinus directeurs α, β de la tangente à la courbe (C),

$$(3) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

C'est la formule fondamentale dans la théorie de la courbure.

398. Théorème. — *Une courbe tracée sur la surface a même rayon de courbure au point* M *que la section plane déterminée dans la surface par son plan osculateur.*

En effet, ces deux courbes ayant même tangente et même normale principale au point M, les quantités θ, α, β ont mêmes valeurs pour les deux courbes et la formule **(3)** fournit la même valeur pour R.

Ce théorème ramène la courbure des courbes quelconques à celle des sections planes. Toutefois ce théorème tombe en défaut si $\cos\theta$ et $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ s'annulent à la fois, ce qui rend la formule **(3)** identique. C'est ce qui arrive si la courbe a son plan osculateur tangent à la surface et si elle est tangente aux *directions asymptotiques* (n° 403).

399. Théorème de Meusnier. — *Le rayon de courbure au point* M *d'une section oblique est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale qui a même tangente en* M.

Soit R_0 le rayon de courbure de la section normale qui a pour tangente MT. Pour cette section, on a $\cos\theta = \pm 1$, selon que R_0 est dirigé suivant MN ou en sens contraire. Le premier membre de **(3)**

se réduit donc à $\pm 1 : R_0$ et, comme le second membre est indépendant de θ, nous obtenons

$$(4) \qquad \frac{\cos\theta}{R} = \frac{\pm 1}{R_0}, \quad \text{d'où} \quad R = R_0(\pm\cos\theta).$$

Dans les deux cas, $\pm\cos\theta$ est le cosinus de l'angle que fait R avec R_0, ce qui prouve la proposition.

400. Courbure normale et courbure géodésique. — Soit C le centre de courbure de la courbe tracée sur la surface. Menons par ce point l'axe de courbure (ou la normale au plan osculateur) coupant en C_0 le plan normal à la surface (passant par MT) et en C_1 le plan tangent.

Le point C_0 s'appelle *centre de courbure normale*, le vecteur MC_0 *rayon de courbure normale*, la grandeur inverse *courbure normale* de la courbe au point M.

Le point C_1 s'appelle *centre de courbure géodésique*, MC_1 *rayon de courbure géodésique*, la grandeur inverse *courbure géodésique*.

D'après cela, les courbures normale et géodésique ont respectivement pour valeurs (abstraction faite du signe)

$$\frac{\cos\theta}{R}, \qquad \frac{\sin\theta}{R}.$$

On voit aussi, en se reportant à la relation (4) du n° précédent, que *la courbure normale d'une courbe est égale à celle de la section normale qui a même tangente* MT.

Si l'on projette la courbe sur le plan tangent, la courbe et sa projection sont respectivement une section oblique et une section normale du cylindre projetant. Donc, en vertu du théorème de Meusnier, *la courbure géodésique est la courbure au point* M *de la projection de la courbe sur le plan tangent à la surface.* De même, *la courbure normale est celle de la projection de la courbe sur le plan normal à la surface passant par la tangente* MT.

On arrive le plus naturellement aux définitions des courbures normale et géodésique en étudiant la rotation de la tangente à la courbe par rapport à la normale MN à la surface, et par rapport à la normale MP à la courbe menée dans le plan tangent.

Soient X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale MN et U, V, W ceux de la normale MP, ensuite ω et ω' les angles de la tangente avec

MN et avec MP. Ces angles étant comptés positivement dans les sens TN et TP, leur valeur initiale est $-\frac{\pi}{2}\cdot$ Or on a

$$\cos\omega = X\alpha + Y\beta + Z\gamma, \qquad \cos\omega' = U\alpha + V\beta + W\gamma\,;$$

et, en différentiant pour un déplacement infiniment petit de la tangente, MN et MP restant fixes,

$$-\sin\omega\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{ds} = X\frac{d\alpha}{ds} + \dots = \frac{X\lambda + \dots}{R},$$

$$-\sin\omega'\frac{d\omega'}{ds} = \frac{d\omega'}{ds} = U\frac{d\alpha}{ds} + \dots = \frac{U\lambda + \dots}{R}.$$

Supposons l'angle θ de la normale principale avec MN compté positivement dans le sens NP, on a

$$X\lambda + \dots = \cos\theta, \qquad U\lambda + \dots = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta.$$

Il vient donc

$$(5) \qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\cos\theta}{R}, \qquad \frac{d\omega'}{ds} = \frac{\sin\theta}{R}.$$

Ce sont respectivement les expressions des courbures normale et géodésique. Elles sont positives ou négatives suivant le sens des rotations $d\omega$ et $d\omega'$ (R étant ici essentiellement positif).

Si la normale principale est normale à la surface, $\theta = 0$ ou π, et la courbure géodésique est nulle. Les lignes dont la courbure géodésique est constamment nulle portent le nom de *lignes géodésiques.*

Si la normale principale est tangente à la surface, $\theta = \pi\,.\,2$ et la courbure normale est nulle. Les lignes dont la courbure normale est constamment nulle portent le nom de *lignes asymptotiques* (n° 413).

401. Equation d'Euler. Sections et directions principales. — Le théorème de Meusnier ramène l'étude de la courbure à celle de la courbure des sections normales. Celle-ci a été faite par Euler.

Plaçons l'origine des coordonnées au point M et prenons la normale MN pour axe des z, donc pour plan xy le plan tangent à la surface. On aura $p = q = 0$. Pour une section normale, la formule fondamentale se réduira à

$$(6) \qquad \frac{1}{R} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

si R est dirigé suivant MN ; tandis qu'il faudra changer le signe du premier membre si R est de sens contraire. Mais nous conviendrons

de considérer la formule (6) comme générale, en attribuant un double signe à R, positif dans le sens MN et négatif dans le sens contraire.

Soit ω l'angle de la tangente MT à la section avec l'axe des x ; il vient, par une transformation facile,

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega$$

$$= \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\omega + s\sin 2\omega.$$

Cette équation montre que $1 : R$ est une fonction continue et limitée de ω : elle a donc au moins un maximum et un minimum. On les trouvera en cherchant les valeurs de ω qui annulent sa dérivée, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s}{r-t}\cdot$$

Cette équation donne pour ω deux directions rectangulaires. Prenons-les pour axes des x et des y ; l'équation précédente ayant pour racine $\omega = 0$, il faudra que $s = 0$, et l'équation (2) se réduira à

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + t\sin^2\omega.$$

Soient R_1 le rayon de courbure de la section $\omega = 0$; R_2 celui de la section $\omega = \frac{\pi}{2}$; nous aurons $1 : R_1 = r$ et $1 : R_2 = t$. Nous obtenons ainsi l'*équation d'Euler*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}\cdot$$

Les deux directions rectangulaires que nous venons de considérer correspondent aux sections de plus grande et de plus petite courbure, qui s'appellent les *sections principales*. Les plans de ces sections sont les *plans principaux*. Les rayons de courbure R_1 et R_2 de ces sections sont les *rayons de courbure principaux*. Les centres de courbure correspondants sont les *centres de courbures principaux*. Les directions des tangentes aux sections principales sont les *directions principales*.

L'équation d'Euler ne dépend plus en rien des axes coordonnés et elle exprime une propriété de la surface. Elle fait dépendre le rayon de courbure d'une section normale quelconque de l'angle que fait le plan de cette section avec celui d'une section principale et des rayons de courbure principaux.

402. Courbure moyenne. — Soient R' et R'' les rayons de courbure de deux directions rectangulaires définies par les angles ω et $\omega + \pi : 2$; on aura, par la formule d'Euler,

$$\frac{1}{R'} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}, \qquad \frac{1}{R''} = \frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2},$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Donc *la somme des courbures de deux sections rectangulaires est constante au point* M *et égale à la somme des courbures principales.* La moitié de cette constante s'appelle la *courbure moyenne* au point M. Le concept de courbure moyenne est dû à Sophie Germain.

403. Forme de la surface au voisinage du point M. Directions asymptotiques. — On peut distinguer sur la surface trois espèces de points différents quant à leur nature :

1° Si R_1 et R_2 sont de même signe, R a toujours le même signe quel que soit ω, et toutes les sections tournent leur concavité dans le même sens. Dans le voisinage de M, la surface se trouve tout entière du même côté de son plan tangent. C'est ce qui a lieu en tout point d'un ellipsoïde.

2° Si R_1 et R_2 sont de signes contraires, R peut changer de signe. Les deux directions correspondant aux racines de l'équation

$$\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}$$

donnent $\frac{1}{R} = 0$. On les appelle les *directions asymptotiques*, pour une raison que nous indiquerons au n° suivant, et les tangentes correspondantes sont les *tangentes aux directions asymptotiques*. La surface n'est pas tout entière du même côté de son plan tangent et l'on dit qu'elle est à courbures opposées. C'est ce qui arrive en tout point d'un hyperboloïde à une nappe.

3° Un cas intermédiaire entre les deux précédents est celui où l'une des courbures principales, $1 : R_2$ par exemple, est nulle. Il vient alors

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1}.$$

La surface est située tout entière du même côté de son plan tangent, mais R croît à l'infini pour $\omega = 0$. C'est ce qui arrive en tout point d'une surface cylindrique.

Enfin, il faut signaler le cas particulier où les deux rayons de courbure principaux sont égaux. Alors toutes les sections normales ont même courbure. Un tel point s'appelle un *ombilic* de la surface.

404. Indicatrice de Dupin. — On représente géométriquement la variation du rayon de courbure quand le plan de la section tourne autour de la normale, par la construction suivante : On porte sur la tangente à la section une longueur MT égale à la racine carrée de la valeur absolue de R ; le point T décrit dans le plan tangent une courbe, appelée *indicatrice*, qui figure la variation de R. La nature de cette courbe dépend de celle du point M.

1°) Si R_1 et R_2 sont de même signe, R est toujours de même signe aussi, par exemple positif. Alors les coordonnées du point T sont $x = \sqrt{R} \cos \omega$, $y = \sqrt{R} \sin \omega$, et l'indicatrice est une ellipse

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 1.$$

On dit, dans ce cas, que M est un *point elliptique.*

2°) Si l'une des courbures principales, $1 : R_2$ par exemple, est nulle, l'indicatrice est dite parabolique et devient un système de deux droites parallèles, à savoir (en supposant R_1 positif)

$$\frac{x^2}{R_1} = 1.$$

On dit, dans ce cas, que M est un *point parabolique.*

3°) Si R_1 et R_2 sont de signes contraires, R est positif quand MT tombe dans l'un des angles entre les directions asymptotiques et négatif dans l'autre angle. Les coordonnées du point T sont, suivant le cas, $x = \sqrt{\pm R} \cos \omega$, $y = \sqrt{\pm R} \sin \omega$. L'indicatrice se compose de deux hyperboles conjuguées

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1 ;$$

et les *directions asymptotiques* sont celles des asymptotes de l'indicatrice, ce qui justifie leur nom. On dit alors que M est un *point hyperbolique.*

On peut faire apparaître autrement le rapport de l'indicatrice avec la forme de la surface autour du point M. Rappelons que le point M a été pris comme origine des coordonnées et les tangentes aux sections principales comme axes des x et des y. Donc, si l'on développe z par

la formule de Maclaurin suivant les puissances de x et de y, il vient (p, q, s s'annulant à l'origine)

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + ty^2) + \cdots$$

ou, puisque $r = 1 : R_1$ et $t = 1 : R_2$ (nº 401),

$$2z = \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} + \cdots$$

Coupons la surface par deux plans parallèles, $z = \pm l$, infiniment voisins du plan tangent $z = 0$. Les sections auront pour équations approchées

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 2l.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin du point de contact, la courbe d'intersection est semblable à l'indicatrice de ce point.

405. Détermination de la nature d'un point en axes rectangulaires quelconques. — Supposons maintenant que le point $M(x, y, z)$ occupe une situation quelconque par rapport aux axes de coordonnées supposés rectangulaires. La formule (3) nous donnera, pour la courbure d'une section normale quelconque au point M, et avec la même convention que précédemment (nº 401) sur le signe,

$$\frac{1}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{7}$$

Les trois cas à distinguer quant aux variations de signes de $1 : R$ quand on fait varier $\alpha : \beta$, s'aperçoivent encore immédiatement, car elles tiennent aux propriétés du trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$.

1º Si $rt - s^2 > 0$, le trinome et par suite R ont un signe invariable et ne peuvent s'annuler. Le point M est *elliptique*.

2º Si $rt - s^2 = 0$, le trinome peut s'annuler mais ne peut changer de signe, le point M est *parabolique*. Tels sont tous les points d'une surface développable.

3º Si $rt - s^2 < 0$, le trinome et R peuvent changer de signe, le point M est *hyperbolique*.

Les asymptotes de l'indicatrice (nº 404) correspondent aux direc-

tions pour lesquelles la courbure d'une section normale est nulle. Les directions asymptotiques sont donc définies par l'équation :

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0,$$

qui est l'*équation aux directions asymptotiques*.

406. Détermination des sections et des courbures principales. — Les courbures principales sont les maximum et minimum de $1 : R$ considéré comme fonction du rapport $\alpha : \beta$. Or, pour une section normale, nous avons, par la formule (7),

$$\frac{1}{RZ} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Mais, comme on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2 = 1,$$

l'équation précédente peut être remplacée par une autre où n'intervient plus que le rapport $\alpha : \beta$, à savoir

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + (p\alpha + q\beta)^2}{RZ} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

de sorte que les maximum et minimum de $1 : R$ peuvent se déduire de cette relation où les variables α, β sont considérées comme indépendantes. Il faut, pour cela, tirer de cette relation les dérivées de $1 : R$ par rapport à α et à β et les annuler séparément. Il est clair que cela revient à dériver l'équation précédente par rapport à α puis β séparément, ce qui donne

$$\frac{\alpha + p(p\alpha + q\beta)}{RZ} = r\alpha + s\beta, \qquad \frac{\beta + q(p\alpha + q\beta)}{RZ} = s\alpha + t\beta,$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{\alpha + p(p\alpha + q\beta)}{r\alpha + s\beta} = \frac{\beta + q(p\alpha + q\beta)}{s\alpha + t\beta} = RZ.$$

L'égalité des deux premiers membres constitue une équation du second degré qui donne deux valeurs pour le rapport $\alpha : \beta$. Elle fait connaître les directions des tangentes aux sections principales. Toutes réductions faites, elle devient

$$(9) \quad \alpha^2[s(1+p^2)-pqr] + \alpha\beta[t(1+p^2)-r(1+q^2)]-\beta^2[s(1+q^2-pqt]=0.$$

D'autre part, si l'on élimine $\alpha : \beta$ entre les deux équations (8), on forme l'équation du second degré qui a pour racines les deux courbures principales $1 : R_1$ et $1 : R_2$, à savoir

$$(10) \quad \frac{1+p^2+q^2}{R^2Z^2} - \frac{r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs}{RZ} + (rt - s^2) = 0.$$

Remplaçant Z par sa valeur connue (n° 397), on conclut immédiatement de cette équation

$$(11)\quad \frac{1}{R_1R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1+q^2) + t(1+p^2) - 2pqs}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

La dernière valeur divisée par 2 est celle de la *courbure moyenne* au point M ; la précédente s'appelle la *courbure totale* de la surface en ce point.

Remarque. On déduit facilement de l'équation (**9**) la condition pour qu'un point soit un ombilic. Les sections principales étant indéterminées, l'équation doit être identique, ce qui entraîne

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

Ces deux équations caractérisent un ombilic. Elles constituent, avec celle de la surface, un système de trois équations entre x, y, z. Donc, en général, une surface n'a qu'un nombre limité d'ombilics.

407. Formules d'Olinde Rodrigue. — Les équations (**8**) qui déterminent les sections et les courbures principales peuvent être présentées sous diverses formes plus simples ou plus symétriques.

Remplaçons-y d'abord α et β par les composantes proportionnelles dx et dy d'un déplacement sur une direction principale ; elles peuvent s'écrire

$$(12)\qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq} = RZ.$$

Substituons à p et q leurs valeurs $-X : Z$ et $-Y : Z$; il viendra

$$-\frac{Z\,dx - X\,dz}{Z\,dX - X\,dZ} = -\frac{Z\,dy - Y\,dz}{Z\,dY - Y\,dZ} = R,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx + R\,dX}{X} = \frac{dy + R\,dY}{Y} = \frac{dz + R\,dZ}{Z}.$$

Mais chacune des fractions est nulle, car la somme des numérateurs multipliés par X, Y, Z respectivement est nulle, tandis que celle des dénominateurs est *un*. On a donc

$$(13)\quad dx + R\,dX = 0, \quad dy + R\,dY = 0, \quad dz + R\,dZ = 0.$$

Ce sont les formules d'*Olinde Rodrigue* relatives à un déplacement

suivant une direction principale. Elles se réduisent à deux distinctes, car en multipliant par X, Y, Z et ajoutant on obtient une identité.

Remarque. — Les formules d'Olinde Rodrigue permettent de montrer immédiatement qu'*une surface dont tous les points sont des ombilics est une sphère.*

En effet, toutes les directions étant principales, ces formules doivent se vérifier pour des valeurs arbitraires de dx et de dy ; les deux premières se décomposent donc dans les quatre suivantes :

$$1+\text{R}\frac{\partial \text{X}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \text{X}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \text{Y}}{\partial x}=0,\quad 1+\text{R}\frac{\partial \text{Y}}{\partial y}=0.$$

Les deux formules du milieu montrent que X ne dépend que de x et Y de y seuls ; par suite, les formules extrêmes montrent que R est constant. Les formules d'Olinde Rodrigue sont alors immédiatement intégrables, et on en tire (a, b, c étant trois constantes d'intégration)

$$x-a+\text{RX}=0,\quad y-b+\text{RY}=0,\quad z-c+\text{RZ}=0,$$

d'où $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\text{R}^2$.

408. Expression des courbures moyenne et totale à l'aide des cosinus directeurs de la normale. — L'équation, équivalente à (**9**), qui détermine les directions principales s'obtient en éliminant R entre deux des formules d'Olinde Rodrigue, les deux premières par exemple ; il vient

$$dx\,d\text{Y}-dy\,d\text{X}=0.$$

Pour former celle des courbures principales, supposons encore X et Y exprimés en fonction de x et de y. Les deux premières équations (**13**) s'écriront comme il suit :

$$\left(\frac{1}{\text{R}}+\frac{\partial \text{X}}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial \text{X}}{\partial y}dy=0,\qquad \frac{\partial \text{Y}}{\partial x}dx+\left(\frac{1}{\text{R}}+\frac{\partial \text{Y}}{\partial y}\right)dy=0.$$

L'élimination de $dx : dy$, nous donne alors

$$\left(\frac{1}{\text{R}}+\frac{\partial \text{X}}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{\text{R}}+\frac{\partial \text{Y}}{\partial y}\right)-\frac{\partial \text{X}}{\partial y}\,\frac{\partial \text{Y}}{\partial x}=0.$$

Cette équation du second degré en $1 : \text{R}$, équivalente à (**10**), est celle qui détermine les courbures principales. On en tire des expres-

sions élégantes de la courbure totale et de la courbure moyenne, à savoir

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{d(X, Y)}{d(x, y)}, \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Il suffit d'effectuer les calculs pour retrouver les valeurs (11).

409. Courbure totale. — Gauss, à qui l'on doit la notion de courbure totale, a montré qu'on peut en donner une définition analogue à celle de la courbure des courbes planes.

Considérons, sur la surface S, une portion d'aire σ sur laquelle $1 : R_1R_2$ ne change pas de signe. Par l'origine, menons un vecteur OP de longueur 1 parallèle à la normale à la surface au point M (de coordonnées x, y, z). Si M décrit σ, le point P (de coordonnées X, Y, Z) décrit une portion de sphère d'aire σ_1. On dit que σ_1 est la *courbure totale* de la portion de surface σ et $\sigma_1 : \sigma$, sa courbure moyenne. Si l'aire σ tend vers 0 autour d'un point M donné, la limite de la courbure moyenne sera la *courbure totale de la surface au point* M.

On vérifie immédiatement qu'on retrouve, avec cette définition, la valeur $1 : R_1R_2$ indiquée au n° précédent. Soient, en effet, σ' et σ'_1 les projections de σ et de σ_1 sur le plan xy. On a

$$\sigma = \iint_{\sigma'} \frac{dx\,dy}{Z}, \qquad \sigma_1 = \iint_{\sigma'_1} \frac{dX\,dY}{Z}.$$

Si l'on transforme la seconde intégrale en prenant x, y, comme nouvelles variables, c'est le champ d'intégration σ' qui correspond à σ'_1, et l'on trouve, en attribuant à σ_1 le signe $+$ ou $-$ suivant que la correspondance entre σ_1 et σ'_1 est directe ou inverse (n° 16),

$$\sigma_1 = \iint_{\sigma'} \frac{d(X, Y)}{d(x, y)} \, \frac{dx\,dy}{Z} = \iint_{\sigma'} \frac{1}{R_1R_2} \cdot \frac{dx\,dy}{Z}.$$

Donc, si l'on fait tendre σ' vers 0, on a effectivement, par l'application du théorème de la moyenne à l'intégrale double,

$$\lim \frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{1}{R_1R_2}.$$

La définition précédente subsiste pour les surfaces développables où $1 : R_1R_2$ est nul partout. En effet, la courbure totale σ_1 d'une portion quelconque σ de surface développable est nulle. On s'en assure en observant que, la normale étant la même tout le long d'une génératrice, le point P défini plus haut varie sur une courbe.

410. Surfaces à courbure moyenne nulle. — Les surfaces à courbure moyenne nulle portent le nom de *surfaces minima*, parce que toute portion d'une telle surface limitée par une courbe fermée est d'aire moindre que tout autre surface s'appuyant sur la même courbe. Nous allons vérifier, en effet, que la condition trouvée au n° 325 pour qu'une surface soit d'aire minimum exprime précisément que sa courbure moyenne est nulle.

Les surfaces à courbure moyenne nulle sont caractérisées par l'équation (n° 408)

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Si l'on observe que X et Y sont précisément identiques aux quantités P et Q du n° 325, on reconnaît que cette condition exprime que la surface est d'aire minimum. C'est pourquoi on donne aux surfaces à courbure moyenne nulle le nom de *surfaces minima*. Si on limite par une courbe une portion quelconque d'une telle surface, l'aire de cette portion est moindre que celle de toute autre surface limitée par la même courbe.

En tout point d'une surface minima, les deux courbures principales sont égales et de signes contraires, l'indicatrice est formée de deux hyperboles équilatères conjuguées et les directions asymptotiques sont rectangulaires.

411. Lignes de courbure et développée d'une surface. — Le lieu des normales à une surface le long d'une ligne (C) de celle-ci est une surface réglée qu'on appelle *normalie* et qui, en général, est gauche. *On appelle lignes de courbure les lignes de la surface qui sont les traces de normalies développables.*

D'après cette définition, toute ligne plane est une ligne de courbure de son plan, car la normalie correspondante est un cylindre. Toute ligne de la sphère est une ligne de courbure, car la normalie correspondante est un cône. Les méridiens et les parallèles des surfaces de révolution sont des lignes de courbure, car les normalies correspondantes sont des plans et des surfaces coniques.

Les normales à une surface forment une congruence de droites (n° 391). Par chaque génératrice on peut donc faire passer deux normalies développables et, par suite, par chaque point de la surface, on peut généralement faire passer deux lignes de courbure. Occupons-nous d'abord de déterminer leurs directions.

Les équations de la normale au point quelconque M (x, y, z) sont

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \qquad \eta - y + q(\zeta - z) = 0.$$

Elles dépendent de deux paramètres x et y. Pour que cette normale, en se déplaçant, engendre une développable (ou ait une enveloppe), il faut poser une relation $y = \varphi(x)$ telle que deux normales infiniment voisines se rencontrent (au premier ordre près). Les coordonnées ξ, η, ζ du point de rencontre ou *point focal*, qui est celui où la normale touche son enveloppe, doivent vérifier les équations de la normale et leurs différentielles par rapport au paramètre qui sont

$$(\zeta - z)\,dp - (dx + p\,dz) = 0, \qquad (\zeta - z)\,dq - (dy + q\,dz) = 0,$$

et l'on en tire

$$(14) \qquad \zeta - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'on ait

$$(15) \qquad \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

C'est la relation qui définit la fonction $y = \varphi(x)$, c'est donc l'*équation différentielle des lignes de courbure*. Si l'on y remplace dz, dp et dq par leurs expressions en dx et dy, elle devient

$$(16) \qquad \frac{(1 + p^2)\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1 + q^2)\,dy}{s\,dx + t\,dy}.$$

L'équation (**15**) ou (**16**) coïncide avec celle (**12**) ou (**8**) qui définit les directions principales (n°s 407). Donc *les lignes de courbure sont, en chaque point, tangentes aux sections principales, et il y a, par conséquent, deux familles de lignes de courbure se coupant à angle droit et formant sur la surface un système orthogonal* (1).

Déterminons maintenant les *points focaux* sur la normale au point M. L'ordonnée ζ d'un tel point se tire de l'équation (**14**), qui donne, en tenant compte de (**12**), $\zeta = z + RZ$, où R est l'un des deux rayons principaux R_1 ou R_2. Donc *les deux points focaux sur une normale sont les deux centres de courbure principaux correspondants.*

Ainsi la surface focale de la congruence des normales est le lieu des centres de courbure principaux. On l'appelle aussi la *surface des centres* ou la *développée* de la surface proposée. *Les arêtes de rebrous-*

(1) L'orthogonalité des lignes de courbure est aussi la conséquence immédiate de celle des développables d'une congruence de normales (n° 392).

sement des normalies développables sont sur la surface des centres et en sont des géodésiques (n° 391).

412. Application aux développables. — Pour une développable, les génératrices et leurs trajectoires orthogonales forment les deux familles de lignes de courbure. La première nappe de la surface des centres est rejetée à l'infini. Pour déterminer l'autre, remarquons que *le plan normal à une trajectoire en un point* M *de la développable coïncide avec le plan rectifiant* (n° 393) *de l'arête au point* O *où cette arête est touchée par la génératrice passant par* M (car ce plan contient la tangente OM et est normal au plan osculateur de l'arête). Par suite, *une trajectoire a pour axe de courbure la caractéristique du plan rectifiant de l'arête* et son centre de courbure est sur cette caractéristique. Cette caractéristique est donc le lieu des centres de courbure des trajectoires pour les différents points de la génératrice OM. Il s'ensuit que *la développée d'une développable est une seconde développable, à savoir la développable rectifiante de l'arête de la première.*

413. Lignes asymptotiques. — *Les lignes asymptotiques d'une surface sont celles qui touchent en chacun de leurs points une des asymptotes de l'indicatrice.* Leur équation différentielle s'obtient en remplaçant α et β par dx et dy dans l'équation aux directions asymptotiques (n° 405), ce qui donne

$$(17) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

En se reportant à la formule (**3**), on voit immédiatement que cette équation exprime que *les lignes asymptotiques sont celles dont la courbure normale* $\cos\theta : R$ *est constamment nulle.* En particulier, *toute droite située sur une surface est donc une ligne asymptotique de celle-ci.*

Si les points d'une surface sont hyperboliques, l'équation (**17**) donne deux valeurs pour $dy : dx$ et définit, par conséquent, deux familles de lignes asymptotiques se coupant sur la surface. Si tous les points sont paraboliques, la surface est développable, l'équation n'a plus qu'une racine et la seule famille de lignes asymptotiques est celle des génératrices rectilignes. Enfin, si les points sont elliptiques, il n'y a plus de lignes asymptotiques réelles.

On peut donner une autre définition des lignes asymptotiques non rectilignes. Ce sont *les lignes dont le plan osculateur est tangent à la surface*, car c'est évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que la courbure normale soit nulle.

414. Tangentes conjuguées. — Deux tangentes en un point M d'une surface sont *conjuguées* si elles coïncident avec deux diamètres conjugués de l'indicatrice ou *si elles ont des directions conjuguées.* En vertu des propriétés des coniques, *il n'existe, en chaque point d'une surface* (hormis les ombilics), *qu'un seul système de deux directions conjuguées rectangulaires, ce sont les directions principales.*

Théorème. — *Quand le point de contact varie le long d'une courbe* (C) *sur une surface, la caractéristique du plan tangent est, en chaque point de contact, la tangente conjuguée de celle à la courbe* (C).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe (C) ; l'équation du plan tangent et sa différentielle par rapport au paramètre, à savoir (puisque $dz = p\,dx + q\,dy$)

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$
$$(\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0,$$

définissent une caractéristique passant par M. Plaçons l'origine au point M et prenons les tangentes aux directions principales comme axes des x et des y ; nous avons (n° 401)

$$x = y = z = p = q = s = 0, \quad dp = r\,dx = \frac{dx}{R_1}, \quad dq = t\,dy = \frac{dy}{R_2},$$

et les équations de la caractéristique deviennent

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\xi\,dx}{R_1} + \frac{\eta\,dy}{R_2} = 0.$$

Cette droite et la tangente à (C), situées dans le plan xy, ont respectivement comme coefficients angulaires m et m' :

$$m = -\frac{R_2}{R_1}\frac{dx}{dy}, \qquad m' = \frac{dy}{dx}; \qquad \text{d'où} \qquad mm' = -\frac{R_2}{R_1},$$

ce qui est la relation entre deux directions conjuguées de la conique $R_2x^2 + R_1y^2 = \pm R_1R_2$.

Observons que le plan tangent le long de (C) enveloppe une développable ; nous obtenons cet autre énoncé : *Si une développable est circonscrite à une surface, en chaque point de la courbe de contact la génératrice et la tangente à cette courbe sont deux tangentes conjuguées.*

415. Torsion géodésique. — Soit M un point d'une courbe (C) tracée sur une surface. Menons par ce point la tangente MT à la courbe, la

normale MN à la surface et la normale MP au plan normal MNT de manière que le trièdre MTNP soit de rotation directe (ou de même rotation que $Oxyz$).

Par un point M′ de la courbe (C), infiniment voisin de M, menons la normale M′N′ à la surface ; désignons par ψ l'angle infiniment petit que fait M′N′ avec le plan normal MNT ; on appelle *torsion géodésique* de la courbe au point M et l'on désigne par $1:\gamma$ l'expression

$$\frac{1}{\gamma} = \lim \frac{\psi}{ds} \cdot$$

On détermine le signe de ψ et, par suite, celui de la torsion géodésique en considérant l'angle ψ comme complémentaire de celui que fait M′N′ avec la normale MP au plan MNT. Ainsi la torsion sera positive si la normale M′N′ tourne dans le sens positif autour de MT quand M′ se déplace dans le sens MT. Soient U, V, W les cosinus directeurs de MP et X, Y, Z ceux de MN, on a donc, au premier ordre près,

$$\psi = \sin\psi = \mathrm{U}(\mathrm{X} + d\mathrm{X}) + \cdots = \mathrm{U}\,d\mathrm{X} + \mathrm{V}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{W}\,d\mathrm{Z}$$

$$(18) \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{\mathrm{U}\,d\mathrm{X} + \mathrm{V}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{W}\,d\mathrm{Z}}{ds}.$$

Prenons encore MN comme axe des z et les directions principales comme axes des x et des y ; désignons par ω l'angle de MT avec $\mathrm{M}x$; nous aurons, $\mathrm{M}xyz$ et MTPN étant de sens de rotation contraires et par les relations du n° précédent,

$$\mathrm{U} = \sin\omega, \qquad \mathrm{V} = -\cos\omega, \qquad \mathrm{W} = 0,$$

$$d\mathrm{X} = d\,\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\,dp = -\frac{dx}{\mathrm{R}_1} = -\frac{\cos\omega}{\mathrm{R}_1}\,ds,$$

$$d\mathrm{Y} = d\,\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = -\,dq = -\frac{dy}{\mathrm{R}_2} = -\frac{\sin\omega}{\mathrm{R}_2}\,ds.$$

Substituant ces valeurs dans (18), il vient

$$(19) \qquad \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_2} - \frac{1}{\mathrm{R}_1}\right)\cos\omega\sin\omega.$$

Cette formule entraîne les conclusions suivantes :

1° Sauf si M est un ombilic auquel cas toutes les directions sont principales, la torsion géodésique ne s'annule que si $\omega = 0$ ou $\omega = 90°$, donc : *La torsion géodésique est nulle pour les directions principales et pour celles-là seulement.*

2°) Si l'on remplace ω par $\omega + 90°$, $1:\gamma$ ne fait que changer de

signe, donc : *Quand deux lignes se coupent à angle droit sur la surface, leurs torsions géodésiques sont égales et de signes contraires.*

Remarque. — On obtient encore une expression, que nous allons immédiatement utiliser, de la torsion géodésique en conservant le point M comme origine mais en prenant la tangente MT comme axe des x. Désignons alors par η l'angle d'une normale (variable) à la surface avec l'axe des y et supposons que la normale MN au point M fasse un angle aigu avec Oz ; nous aurons, au point M,

$$X = 0, \quad Y = \cos\eta, \quad Z = \sin\eta; \quad U = 0, \quad V = -\sin\eta, \quad W = \cos\eta.$$

On a, en tout point de la surface, $Y = \cos\eta$ et $X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = 0$; nous en concluons, au point M,

$$dY = -\sin\eta\,d\eta, \qquad dZ = -\frac{Y\,dY}{Z} = \cos\eta\,d\eta,$$

et, en substituant dans la formule (18), nous obtenons, au point M,

$$(20) \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{d\eta}{ds}.$$

416. **Théorème.** — *Si deux surfaces* S *et* S' *se coupent sous un angle* θ, *variable ou non, et qu'on désigne par* $1 : \gamma$ *et* $1 : \gamma'$ *les torsions géodésiques de la ligne d'intersection relativement aux deux surfaces, on a (au signe près), pour un déplacement sur cette ligne,*

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}.$$

Donc, en particulier, si deux surfaces se coupent sous un angle constant θ, *la torsion géodésique de l'intersection est la même sur les deux surfaces ; et, réciproquement, si la torsion est la même, les deux surfaces se coupent sous un angle constant.*

Pour démontrer cette formule, conservons les notations de la remarque précédente, mais en accentuant celles relatives à S'. En un point M de l'intersection, menons les normales MN et MN' faisant entre elles l'angle θ. Prenons la tangente MT comme axe des x et menons l'axe Mz de manière qu'il fasse un angle aigu avec chacune des deux normales précédentes. Au point M, nous avons $\eta = \eta' + \theta$ (en supposant $\eta' < \eta$) et, en un point voisin,

$$\eta = \eta' + \theta - \varepsilon,$$

où ε est positif, car η, η' et θ sont trois angles d'un trièdre et l'un

d'eux ne peut surpasser la somme des deux autres. Donc ε est minimum en M, sa différentielle s'y annule ; et, en différentiant, nous trouvons, au point M,

$$d\eta = d\eta' + d\theta, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\eta}{ds} - \frac{d\eta'}{ds}.$$

Par la formule (**20**) cette relation revient à celle de l'énoncé.

Rappelons-nous que les lignes de courbure sont caractérisées par la propriété d'avoir une torsion géodésique nulle (donc constante), nous voyons que le théorème précédent nous donne le suivant :

417. Théorème de Joachimsthal. — *Deux surfaces qui se coupent suivant une ligne de courbure commune font entre elles un angle constant ; et, réciproquement, si elles se coupent sous un angle constant, l'intersection ne peut être ligne de courbure pour l'une sans l'être pour l'autre.*

En particulier, toute ligne plane étant ligne de courbure de son plan, *si une ligne de courbure est plane, son plan coupe la surface sous un angle constant, et réciproquement.*

418. Théorème de Dupin. — On dit que trois familles de surfaces :

$$F_1(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad F_2(x, y, z, \beta) = 0, \qquad F_3(x, y, z, \gamma) = 0,$$

forment un *système triple orthogonal*, lorsque par chaque point passe une surface de chaque famille et que deux surfaces de familles différentes se coupent à angle droit.

THÉORÈME. — *Les trois familles d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure* (DUPIN).

Soient S_1, S_2, S_3 les trois surfaces se coupant en M suivant les lignes d'intersection C_{23}, C_{31}, C_{12}. La torsion géodésique de C_{23} est la même sur S_2 et sur S_3 (n° 416) ; nous la désignerons par $1 : \gamma_{23}$ et nous désignerons par $1 : \gamma_{31}$ et $1 : \gamma_{12}$ les deux autres torsions analogues. Comme C_{23} et C_{31} se coupent normalement sur S_3 au point **M**, on a, en ce point (n° **415, 2°**),

$$\frac{1}{\gamma_{23}} + \frac{1}{\gamma_{31}} = 0 \text{ ; de même, } \frac{1}{\gamma_{31}} + \frac{1}{\gamma_{12}} = \frac{1}{\gamma_{12}} + \frac{1}{\gamma_{23}} = 0,$$

ce qui exige que chacune des trois torsions soit nulle séparément. Donc les intersections sont des lignes de courbure des surfaces (n° 415, 1°).

Quadriques homofocales. — Par un point x, y, z on peut faire passer trois quadriques du système :

$$(21) \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2),$$

car les valeurs correspondantes du paramètre λ sont les racines de cette équation du 3ᵉ degré en λ. Or ces trois racines sont réelles et comprises respectivement dans les intervalles $(-\infty, c^2)$, (c^2, b^2), (b^2, a^2) comme on s'en assure par les substitutions $\lambda = -\infty$, $c^2-\varepsilon$, $c^2+\varepsilon$, $b^2-\varepsilon$, $b^2+\varepsilon$, $a^2-\varepsilon$. Donc, par chaque point, passent trois quadriques du système : un ellipsoïde $(c^2>\lambda)$, un hyperboloïde à une nappe $(b^2>\lambda>c^2)$ et un hyperboloïde à deux nappes $(a^2>\lambda>b^2)$.

Ces trois familles forment un système triple orthogonal.

En effet, les normales à deux surfaces (λ) et (λ') en un point commun x, y, z ont pour coefficients directeurs respectivement

$$\frac{x}{a^2-\lambda}, \frac{y}{b^2-\lambda}, \frac{z}{c^2-\lambda}; \qquad \frac{x}{a^2-\lambda'}, \ldots$$

et la condition d'orthogonalité

$$\frac{x^2}{(a^2-\lambda)(a^2-\lambda')}+\frac{y^2}{(b^2-\lambda)(b^2-\lambda')}+\frac{z^2}{(c^2-\lambda)(c^2-\lambda')}=0$$

s'obtient en soustrayant membre à membre les équations des surfaces (λ) et (λ').

Les lignes de courbure de l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

se déduisent immédiatement de là, et on en conclut que ce sont des lignes algébriques. Ce sont les intersections de cet ellipsoïde avec les familles d'hyperboloïdes à une et à deux nappes comprises dans la formule (21).

419. Extension des formules au cas d'une représentation paramétrique de la surface. — Supposons les coordonnées x, y, z des points de la surface exprimées en fonctions *continues* et *dérivables* de deux paramètres indépendants u et v. Nous convenons de représenter leurs dérivées partielles par un indice comme il suit :

$$\frac{\partial x}{\partial u}=x_1 \quad \frac{\partial x}{\partial v}=x_2 \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=x_{11}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=x_{12}=x_{21}, \ldots$$

Nous définissons alors les paramètres suivants (les sommes Σ s'étendant à x, y, z) :

$$E = \Sigma x_1^2, \qquad F = \Sigma x_1 x_2, \qquad G = \Sigma x_2^2,$$

$$A = \Sigma(y_1 z_2 - y_2 z_1), \qquad B = \Sigma(z_1 x_2 - z_2 x_1), \qquad C = \Sigma(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

$$H^2 = A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

$$L = \frac{Ax_{11} + By_{11} + Cz_{11}}{H}, \qquad M = \frac{Ax_{12} + By_{12} + Cz_{12}}{A},$$

$$N = \frac{Ax_{22} + By_{22} + Cz_{22}}{H},$$

ou, sous forme de déterminants,

$$HL = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad HM = \begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad HN = \begin{vmatrix} x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

La *différentielle d'un arc de courbe* sur la surface est

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Les *cosinus directeurs de la normale* à la surface sont :

$$X = \frac{A}{H}, \qquad Y = \frac{B}{H}, \qquad Z = \frac{C}{H}$$

et, avec la convention sur le sens de la normale faite au n° 397, il faut donner à H le signe de C.

La *courbure normale d'une courbe de la surface* dont la normale principale fait avec la normale à la surface l'angle θ, se tire de la formule (1) du n° 397. C'est

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z}{ds^2} = \frac{A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z}{H\,ds^2},$$

c'est-à-dire, en remplaçant d^2x, d^2y et d^2z par leurs valeurs en du, dv, d^2u, d^2v et en observant que les termes en d^2u et d^2v se détruisent,

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}.$$

La *courbure d'une section normale* dont la direction est définie par le rapport $du : dv$ se tire de là en faisant $\cos\theta = 1$ et en remplaçant ds^2 par sa valeur. C'est, avec la convention de signe du n° 401,

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

L'équation des directions asymptotiques (*ou l'équation différentielle des*

lignes asymptotiques) s'obtient en écrivant que la courbure est nulle. C'est

$$L\,du^2 + 2M\,du\,du + N\,dv^2 = 0.$$

Désignons, en abrégé, la courbure $1 : R$ par ρ. L'avant-dernière équation nous donne, en chassant le dénominateur,

$$(L - \rho E)\,du^2 + 2(M - \rho F)\,du\,dv + (N - \rho G)\,dv^2 = 0.$$

Pour obtenir les courbures principales (maximum et minimum de ρ) il faut, comme au n° 406, annuler les dérivées partielles de cette équation homogène par rapport à du et à dv, ce qui donne

$$(L - \rho E)\,du + (M - \rho F)\,dv = (M - \rho F)\,du + (N - \rho G)\,dv = 0.$$

L'élimination de ρ entre ces deux équations conduit à l'*équation aux directions principales ou celle des lignes de courbure* :

$$\frac{L\,du + M\,dv}{M\,du + N\,dv} = \frac{E\,du + F\,dv}{F\,du + G\,dv},$$

c'est-à-dire, sous forme de déterminant,

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Par contre, l'élimination de $du : dv$ conduit à l'équation du second degré en ρ qui a pour racines les courbures principales ρ_1 et ρ_2, à savoir

$$(M - \rho F)^2 - (L - \rho E)\,(N - \rho G) = 0\,;$$

d'où, l'expression de la courbure totale :

$$\rho_1\rho_2 = \frac{1}{R_1R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

THÉORÈME DE GAUSS. — *La courbure totale en un point s'exprime en fonction de* E, F, G *et de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, elle ne dépend donc que de l'expression de la différentielle de l'arc.*

En vertu de l'expression précédente de la courbure totale et de la relation $H^2 = EG - F^2$, il suffit de montrer que l'expression $H^2(M^2 - LN)$ s'exprime en fonction de E, F, G et de leurs dérivées.

Remplaçons donc HL, HM, HN par leurs valeurs ci-dessus sous forme de déterminants et effectuons les produits par la règle de la

multiplication des déterminants ; tenant encore compte des valeurs de E, F, G, l'expression $H^2(M^2 - LN)$ prend la forme

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_{12}^2 & \Sigma x_1 x_{12} & \Sigma x_2 x_{12} \\ \Sigma x_1 x_{12} & E & F \\ \Sigma x_2 x_{12} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma x_{11} x_{22} & \Sigma x_1 x_{22} & \Sigma x_2 x_{22} \\ \Sigma x_1 x_{11} & E & F \\ \Sigma x_2 x_{11} & F & G \end{vmatrix}$$

et, en retranchant la même quantité $(EG - F^2)\,\Sigma x_{11} x_{22}$ aux deux déterminants, la différence ne change pas et devient

$$\begin{vmatrix} \Sigma(x_{12}^2 - x_{11}x_{22}) & \Sigma x_1 x_{12} & \Sigma x_2 x_{12} \\ \Sigma x_1 x_{12} & E & F \\ \Sigma x_2 x_{12} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \Sigma x_1 x_{22} & \Sigma x_2 x_{22} \\ \Sigma x_1 x_{11} & E & F \\ \Sigma x_2 x_{11} & F & G \end{vmatrix}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier par le calcul direct que les quatre sommes $\Sigma x_1 x_{11}$, $\Sigma x_1 x_{12}$, $\Sigma x_2 x_{12}$, $\Sigma x_2 x_{22}$ sont les demi-dérivées partielles premières de E et G par rapport à u et à v, et que les trois autres :

$$\Sigma x_1 x_{22}, \qquad \Sigma x_2 x_{11}, \qquad \Sigma(x_{12}^2 - x_{11} x_{22}),$$

ont respectivement pour valeurs :

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

420. Surfaces applicables. Théorème de Gauss. — Deux surfaces S et S_1 sont *applicables* l'une sur l'autre quand on peut établir entre leurs points une correspondance telle que les arcs de deux courbes correspondantes sur les deux surfaces soient de même longueur.

Considérons une représentation paramétrique de la surface S :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v);$$

et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de S_1 qui correspond au point x, y, z de S. On aura

$$x_1 = x_1(u, v), \qquad y_1 = y_1(u, v), \qquad z_1 = z_1(u, v).$$

Pour que les arcs de deux courbes correspondantes aient même longueur, il est nécessaire et suffisant que les différentielles de l'arc, ds et ds_1, aient même expression en du, dv pour les deux surfaces, c'est-à-dire que l'on ait

$$ds^2 = ds_1^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ou que les paramètres E, F, G soient les mêmes pour les deux surfaces. Le théorème de Gauss, énoncé à la fin du n° précédent, entraîne donc le suivant :

Théorème. — *Si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, la courbure totale est la même en deux points correspondants des deux surfaces* (Gauss).

Par exemple, le plan ayant une courbure totale constamment nulle, une surface applicable sur un plan doit jouir de la même propriété, c'est donc une surface développable, ainsi que nous l'avons déjà démontré (n° 389).

Exercices.

1. La somme des courbures d'une surface suivant deux directions conjuguées est constante autour d'un même point et égale à celle des courbures principales.

2. Lorsqu'une surface est l'enveloppe d'une infinité simple de sphères, les caractéristiques forment une famille de lignes de courbure circulaires. Réciproquement, une surface ayant une famille de lignes de courbure circulaires est une enveloppe de sphères.

3. Une surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires est l'enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères fixes (cyclide de Dupin).

4. Les centres de courbure principaux d'une surface de révolution sont celui de la méridienne et le point où la normale rencontre l'axe. Donc la seule surface minima de révolution est engendrée par une chaînette tournant autour de sa base (caténoïde).

5. La seule surface minima réglée est l'hélicoïde à plan directeur (surface de vis à filet carré), c'est-à-dire le lieu des normales principales à une hélice circulaire (Catalan).

6. La surface de révolution à courbure totale constante négative est la *pseudosphère*, surface engendrée par la révolution, autour de la base d'une chaînette, de la développée de celle-ci qui a son point de rebroussement au sommet (tractrice).

ERRATA

Page	*Ligne*	*au lieu de*	*lisez*
8	18	$\Sigma m_i\alpha_i,\ \Sigma m_i\alpha_i$	$\Sigma m_i\alpha_i,\ \Sigma \mathrm{M}_i\alpha_i$
16	18	$\int_{\mathrm{D}} \mathrm{P}dx +$	$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}dx +$
83	9	absolument et uniformément	uniformément
116	6	$\mathrm{DF} \leqslant 0$	$\mathrm{DF} < 0$
128	7	pour x infini	pour n infini
132	14 et 15	$a\quad b$	$a'\quad b'$
142	16	$a-x\quad b-x$	$a+x\quad b+x$
200	11	$\mathrm{X}_1dx\ e^{(n-1)\int \mathrm{X}dx}$	$\mathrm{X}_1dx\ e^{-(n-1)\int \mathrm{X}dx}$
205	2	(25)	(23)
208	13	$\frac{3}{4}(y-\mathrm{C})$	$\frac{4}{3}(y-\mathrm{C})$
218	15	lettres P	lettres X
220	13	leur dérivée	leurs dérivées
223	12	y_n	y^n
237	31	**225**	**224**
244	3	(2)	(3)
245	22	avec second	sans second
262	27	$\int \frac{dp}{p}$	$\int \frac{dy}{p}$
264	29	$\mathrm{Y}'y$	$\mathrm{Y}y'$
265	2	$-e^{-\int \mathrm{X}dx}dy$	$-e^{-\int \mathrm{Y}dy}dy$
273	3	$=\mathrm{Log}$	$=\alpha\,\mathrm{Log}$
277	24	$x''=f(t,x,$	$x''=f_1(t,x,$
282	10	$\mathrm{D}^2=0$	$\mathrm{D}^2u=0$
302	15	$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right.$	$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right.$
376	19	n° 355 et ajoutons	n° 335 et ajoutons

Addition au n° 21.

Avant d'établir le lemme du n° 21 qui suppose déjà ce résultat, il faut montrer que l'aire définie par la formule (**1**) est indépendante du choix du plan P pris comme plan xy.

Soit P' un second plan, coupant le premier sous l'angle θ et suivant l'axe

des y (qui peut être ainsi choisi). Faisons un changement d'axes coordonnés amenant, par une rotation θ autour de l'axe des y, le plan des xy en P' et soient x', y, z' les nouvelles variables. On aura

$$x' = x \cos\theta + z \sin\theta, \qquad \frac{d(x', y)}{d(x,y)} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos\theta + p \sin\theta.$$

Soit D' l'aire de P' sur laquelle se projette S et qui correspond à l'aire D de P ; la formule de transformation des intégrales doubles (nº 19) nous donne, pour le passage des variables x, y aux variables x', y,

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\cos Z} = \iint_{D'} \frac{dx'\,dy}{(\cos\theta + p \sin\theta)\cos Z} = \iint_{D'} \frac{dx'\,dy}{\cos Z'},$$

où Z' est l'angle de la normale à S avec Oz', car les cosinus directeurs de ces directions sont respectivement $-p\cos Z$, $-q\cos Z$, $\cos Z$ et $-\sin\theta$, 0, $\cos\theta$. Donc la valeur de l'intégrale double est indépendante du choix du plan P.

(Cette démonstration qui se trouvait dans la première édition a été omise dans celle-ci par méprise).

Suite de l'errata au tome I (2me édition).

Page	*Ligne* (1)	*au lieu de*	*lisez*
13	13	$v - a = u = a$	$v - a = u - a$
42	5	entre deux	entre les deux
45	14*	b et ρ	a et ρ
52	8	conservée	conservé
53	7*	par nn ensemble	pour un ensemble
62	13	des fonctions	de fonctions
64	2*	et $f(x)$	et $f'(x)$
78	en note	droite...gauche	gauche...droite
119	13*	$3y\,dy$	$3y^2dy$
120	8*	$x + \theta k$	$x + \theta h$
126	11*	de variables	des variables
—	9*	composé	composée
197	1*	e^{an}	e^{ax}
240	3*	le même lettre	la même lettre
264	6*	nombre dérivé	nombre dérivé supérieur
267	13	(où $f \leqslant 0$)	(où $f \geqslant 0$)
284	14*	$N' = r \sin \frac{\theta}{2}$. $T' =$	$T' = r \sin \frac{\theta}{2}$. $N' =$
289	1	$\Delta y - dy$	que $\Delta y - dy$
332	6 et 14	T	— T
381	6*	*converge aussi*	*diverge aussi*
402	17	$\int_a^x u_n\,dx$	$\int_a^x u'_n dx$
403	4	en un point	en ce point
—	5	$< \varepsilon$	$< 2\varepsilon$
406	13	$\alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$	$\sqrt{\alpha_2}, \ldots \sqrt[n]{\alpha_n}, \ldots$
407	7*	$\Sigma a_n \rho^n$	$\Sigma \alpha_n \rho^n$
420	13*	Il n'est	Il est
—	7*	$= \sin z$	$= - \sin z$
421	13	z' et z'	z et z'
—	1*	(5) et (2)	(6) et (3)
422	(12)	(7) et (3)	(7) et (4)

(1) L'astérisque signifie qu'il faut compter en remontant.

Rectification et addition au n° 108 (tome I).

La démonstration du théorème I n'est valable que pour l'ensemble E des points où $\Lambda \leqslant 0$ (non pour celui où $\Lambda < 0$, à cause du premier alinéa de la page 80). On la complètera comme il suit :

La conclusion s'étend à l'ensemble des points où $\Lambda < 0$, car, si le Λ de f prend des valeurs négatives, le Λ de $f + \varepsilon x$ en prendra aussi à condition de choisir la constante positive ε assez petite. L'ensemble des points où $\Lambda(f + \varepsilon x)$ est $\leqslant 0$ ayant alors la puissance du continu, l'ensemble des points où $\Lambda(f)$ est < 0 aura la même puissance puisqu'il contient l'ensemble précédent.